EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

DGETI
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN TECNOLÓGICA INDUSTRIAL Y DE SERVICIOS

Academia Nacional de Matemáticas

Cálculo Diferencial

Segunda Edición

México 2021 Año de la Independencia

Aprendizajes Esenciales
Febrero-julio de 2021

Manual del alumno

In memoriam

Un maestro afecta la eternidad; solo él puede decir donde para su influencia.

Henry Adams

En homenaje a nuestros queridos amigos

Armando Rosas Zepeda
Justino Maza Román
Nelson Gutiérrez Valdés
Ramón Figueroa Saucedo

Índice

Encuadre

Propósito

Desarrollar las competencias necesarias para el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes de Bachillerato Tecnológico, en los planteles de la DGETI de la República Mexicana, y que le permita lograr el perfil de egreso que exigen los nuevos tiempos, enfrentando la contingencia actual por el SARS-CoV-2 en su permanencia en casa. Cada manual está diseñado, principalmente, para los alumnos con falta de recursos y/o conectividad para que puedan seguir con sus clases desde casa, así mismo, es muy práctico para trabajar con los alumnos que si cuentan con los recursos para llevar sus clases en línea, y como apoyo al docente titular de las asignaturas para propiciar en el alumno, aún en la distancia, el interés de dirigir su automotivación hacia el aprendizaje autodidacta de los contenidos de los programas de estudio vigentes de las asignaturas de Matemáticas de bachillerato en el plan nacional educativo, a través de la construcción de su propio conocimiento y la aplicación pertinente de ellos en su contexto personal y su vida cotidiana desde una óptica crítico-analítica del pensamiento individual.

Marco teórico

Los seres humanos somos capaces de conocer el mundo a través del lenguaje, del análisis lógico-matemático, de la representación espacial, del pensamiento musical, del uso del cuerpo para resolver problemas o hacer cosas, de la propia interpretación del universo, a interrelación con los demás individuos y de una auto comprensión de nosotros mismos. Donde los individuos se diferencian en el nivel e intensidad de sus habilidades y en las formas en que recurre a esas mismas y se les combina para llevar a cabo diferentes labores, para solucionar diversos problemas y progresar en distintos ámbitos.

Las personas aprenden, representan y utilizan el saber de muchos y diferentes modos, estas diferencias desafían al sistema educativo, que hoy en día lucha por contraponerse a las ideas erróneas de que todo el mundo puede aprender los mismos conocimientos, las mismas disciplinas y del mismo modo y que basta con una medida uniforme y universal para poner a prueba el aprendizaje de los alumnos.

Los procesos de aprendizaje de las matemáticas requieren de estrategias que permitan al alumno que las competencias que son adquiridas en la escuela se sitúen en un ambiente cotidiano para relacionar, interpretar inferir y aplicar los saberes a la resolución de problemas.

El desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes se relaciona directamente con las condiciones que se deben dar para lograr que los aprendizajes en el estudiante sean significativos y lo más funcional posible.

El proceso de evaluación de las competencias consiste en utilizar los medios que permitan a los alumnos reconocer si los esquemas de actuación aprendidos le son de utilidad, a tal grado que le sirvan para intervenir correctamente ante una situación problemática planteada en la cotidianidad.

Marco referencial

Al analizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es posible percatarse que los alumnos han experimentado una serie de estrategias por parte de los docentes para que las competencias las transfieran en situaciones de la vida real. Esto exige relacionar, interpretar, inferir, interpolar, inventar, y aplicar los saberes a la resolución de problemas, mediante la intervención en la realidad reflexionando y actuando sobre la acción y reaccionando con responsabilidad ante situaciones imprevistas o contingentes.

El aprendizaje por competencias está directamente relacionado con las condiciones que deben darse para que los aprendizajes sean los más significativos, situados y funcionales posibles.

La evaluación del aprendizaje de competencias responde a la evaluación de contenidos; pero no toda la evaluación está referida a ello. Si consideramos que la evaluación es un aspecto complejo donde convergen diferentes dimensiones, entonces debemos considerar que están implicados procesos de evaluación también complejos.

El proceso de evaluación de las competencias consistirá en utilizar los medios que permitan reconocer si los esquemas de actuación emprendidos por el estudiante pueden serle de utilidad para superar situaciones reales en contextos concretos lo más aproximados a la realidad; para evaluarla es necesario tener datos fiables sobre el grado de aprendizaje de cada estudiante con relación a la competencia implicada, para ello se requiere el uso de instrumentos y medios diversos en función de las características propias de cada competencia y los distintos contextos donde ésta debe o puede llevarse a cabo.

Dado que las competencias están constituidas por uno o más contenidos de aprendizaje, es necesario identificar los indicadores de logro para cada uno de ellos, pero integrados o que se puedan integrar en la competencia correspondiente y el medio para conocer el grado de su aprendizaje será la intervención del estudiante ante la situación problemática planteada. La evaluación bajo el enfoque de competencias no solo implica evaluar el resultado del aprendizaje del alumno, también el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que conlleva a que en paralelo también el facilitador va desarrollando, aprendiendo y evaluando bajo el enfoque de competencias, su propia praxis educativa.

Características del curso

El curso tal y como aparece en este manual, pretende abarcar los aprendizajes esenciales que le sean útiles al alumno del semestre correspondiente de bachillerato, en los horarios asignados por las autoridades directivas de cada plantel a los titulares de la asignatura. La modalidad del curso es a distancia, es decir, utilizando las herramientas digitales que le permitan al docente comunicarse en el marco de la presente contingencia por la pandemia e interactuar con sus alumnos no teniéndolos presentes físicamente. No obstante, considerando que existen alumnos que no cuentan con los recursos y/o conectividad para sus clases en línea, este manual va dirigido a ellos principalmente.

Los manuales están estratégicamente diseñados para propiciar un aprendizaje autodidacta para quienes no cuentan con los recursos y/o conectividad, así como la participación activa de quienes llevan sus clases en la modalidad en línea, la cual implica un compromiso entre el facilitador y los alumnos para alcanzar los objetivos del curso. Asimismo, las etapas de apertura, desarrollo y cierre, así como las actividades de contextualización y transversalidad y el tipo de ejercicios, permitirá crear las condiciones para estimular un trabajo en el que prevalezca la intención comprometida de cada uno de los participantes, para analizar y extraer las características más relevantes de las situaciones problemáticas; discutir y encontrar formas de solución de los problemas y elegir, entre ellas, las más eficaces, así como fundamentar, en todo momento, el porqué de la estrategia de solución.

Un escenario de este tipo pretende crear las condiciones que propician aprendizajes significativos desde la distancia, donde lo más importante radica en ser consciente de lo que se hace y para qué se hace, y no sólo de solucionar el problema. En esta perspectiva, el docente está comprometido a supervisar de manera permanente el trabajo de sus alumnos, orientar y retroalimentar los contenidos que se requieran en plenarias, o en especial individualización, respetando los procesos de discusión y los argumentos que conduzcan al entendimiento y solución de los ejercicios, atender las dudas individuales y propiciar, siempre, la participación activa y comprometida de los estudiantes. Asimismo, el titular deberá realizar las siguientes actividades:

1. Al inicio del curso, el facilitador creará la herramienta digital que considere pertinente (Zoom, Google Meet, Classroom, WhatsApp, correo electrónico, etc.) y cerciorarse que esté incluida la totalidad de sus alumnos en sus grupos escolares correspondientes.

2. Ya creados los grupos digitales, realizar una dinámica para tratar de conocer a sus alumnos y explicar los objetivos del curso, duración, desarrollo, evaluación y compromisos que se adquieren al asistir al mismo.

3. Podrá hacer uso de la metodología del aula inversa a través de videos que ilustren el desarrollo de las actividades a realizar en cada sesión del curso. Dichos videos han sido seleccionados de la plataforma *Khan Academy* y *YouTube* y serán analizados por los alumnos el día anterior como una actividad extra clase a la sesión correspondiente de cada uno de los temas.

4. Apertura de sesiones. Se recomienda que la apertura se realice con el pase de lista y la resolución de la tarea diaria. Retroalimentando los errores identificados y aclarando dudas.

5. Cierre de sesiones. El cierre se realizará con una pregunta y los comentarios que de ella se deriven. Las preguntas pueden ser: ¿Qué aprendimos el día de hoy? ¿Cuál fue el error más grave que cometimos y cómo lo resolvimos?, entre otras.

6. Asesoría y seguimiento del desempeño de alumnos en la resolución de ejercicios para el aprendizaje y habilidad matemática, marcando un tiempo para su realización individual, al término del cual se preguntará quiénes han concluido, socializando en plenaria las soluciones.

7. Incluir en clase los Retos Transversales y las lecciones Construye T correspondientes a la asignatura y desarrollarlos, considerando una calificación ponderada formativa y sumativa.

8. Considerando la situación especial de contingencia por la pandemia del Covid 19, se podrá omitir la coevaluación y autoevaluación de los alumnos. Al término del curso, el docente evaluará en una escala de 0 a 10, los siguientes aspectos:

· Cumplimiento de los objetivos del curso.
· Dominio de los contenidos.
· Cumplimiento individual de las tareas, trabajos y evaluaciones en tiempo y forma. (Salvo casos especiales y no conectados)

9. Esta obra se hará llegar a los alumnos por los medios que dispongan en el contexto de cada región del país, tratando de abarcar la totalidad de la población de estudiantes de la DGETI. Para ello, en los planteles se establecerán los mecanismos para que se lleve a cabo una interacción favorable entre maestros y alumnos, a fin de dar seguimiento a los avances que tengan los jóvenes y establecer los criterios de evaluación que se consideren viables de acuerdo con las circunstancias de cada región, en el marco de la contingencia actual.

Recomendaciones para la impartición del curso

Este material contempla en su estructura una serie estrategias didácticas y ejercicios con un grado de complejidad gradual ascendente, cuyo principal propósito es que los procedimientos para su resolución y respuestas sirvan de parámetro a todos los involucrados en el proceso educativo, para emitir una opinión basada en el análisis de su alcance e importancia de desarrollarse siguiendo un razonamiento lógico-matemático.

Debido a la trascendencia académica del curso sugerimos tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. Los ejercicios tienen un grado de complejidad ascendente, por lo que es recomendable que el docente informe a los alumnos sobre el impacto que tiene cada habilidad en el aprovechamiento escolar; de igual forma es pertinente que si observa en el grupo dificultades en alguna habilidad la ejercite hasta que se domine, o en su defecto, brinde la oportunidad al estudiante de desarrollarla en otro espacio (plataforma Khan Academy, por ejemplo), o la estrategia que el considere pertinente.

2. El docente podrá grabar sus propios videos explicativos, proporcionar links de videos y textos explicativos de los temas, tutoriales, etc. con el propósito de que el estudiante tenga los recursos suficientes para la adquisición de las competencias y aclaración de posibles dudas en los contenidos.

5. Proporcionar al alumno y si es posible a los padres de familia (grupo de Whats App), los aspectos a considerar en la evaluación y su promedio parcial y final a tiempo para que tenga oportunidad de prepararse y regularizarse, de ser necesario.

6. Se debe tener consideración y empatía con aquellos alumnos que no tengan el recurso de conectarse diariamente y tratar de localizarlos con medios que estén al alcance de sus posibilidades y dándoles la oportunidad de trabajar o regularizarse en las condiciones que le favorezcan. Como, por ejemplo, ponerse de acuerdo en entregar tareas o evaluaciones en un punto de reunión física, por excepción y siguiendo las consideraciones de la contingencia.

Competencias a desarrollar en el curso

COMPETENCIA	ATRIBUTOS
1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	1. Enfrentan las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
	2. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.	1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
	2. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en que se encuentra y los objetivos que persigue.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
	6. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
	3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos grupos de trabajo.

Introducción

Debido a la presente prolongación del confinamiento social por la pandemia del SARS-CoV-2, una vez más las autoridades de la Secretaría de Educación Pública de México, han optado por la apertura de las clases a distancia en todos los niveles educativos, aprovechando los medios electrónicos actuales para que los docentes puedan desarrollar su cátedra de manera digital, teniendo comunicación con sus grupos de alumnos y así poder desarrollar las estrategias pertinentes que le permitan al estudiante alcanzar, en lo mayor posible, las competencias establecidas en los planes y programas de estudio nacionales.

Este manual representa la segunda edición (el primer manual fue generado de manera emergente por la Academia Nacional de Matemáticas, al iniciar la suspensión de clases presenciales en el país, en marzo del 2020 y se enfocó en su momento en cubrir los aprendizajes esenciales del segundo y tercer periodo parcial del semestre que quedaban pendientes, ya que el primer parcial se alcanzó a realizar de manera presencial en las aulas). Para ésta edición se incorporan las actividades propuestas para el primer periodo parcial, determinados por la Academia Nacional de Matemáticas, con el propósito de establecer los Aprendizajes Esenciales que se requieren de ésta asignatura en la formación de los alumnos de bachillerato de la DGETI.

Se trata de una estrategia didáctica que les permitirá a los estudiantes de bachillerato de este subsistema, tanto para los que cuentan con recursos para la modalidad en línea o para los que no, adquirir las competencias necesarias a partir de la recuperación de los conocimientos previos y la construcción de aprendizajes elementales, para continuar con su desarrollo y formación académica a través de la adquisición del sentido numérico, con el cual pueda transitar eficientemente hacia el manejo y comprensión de la abstracción que da el conocimiento lógico-matemático. La construcción del conocimiento deberá ser individual y colaborativa, donde todos los estudiantes tengan la oportunidad de adquirir los mismos conocimientos, según su propia percepción de la realidad.

El curso consta de tres periodos parciales, donde el alumno, guiado por el docente titular, deberá participar activa y dinámicamente en la construcción de sus aprendizajes y la solución de problemas en cada asignatura, en el marco de un ambiente digital y a distancia, debido a la imposibilidad de realizarse presencialmente por el riesgo de contagios presente en esta época de pandemia que nos tocó vivir.

El manual está estructurado en secciones que incluyen actividades de apertura, desarrollo y cierre como estrategias sistemáticas que le permitan al estudiante construir su conocimiento personal, adueñándose del manejo de las herramientas esenciales que le serán útiles en la adquisición de conocimientos formales posteriores y llegar a alcanzar su formación profesional y poder intervenir en los cambios que la sociedad actual le demande.

¡Somos orgullosamente DGETI!

Justificación

Si bien es cierto, las dificultades de comprensión y habilidades en matemáticas no se generan en el bachillerato, pero sí se reflejan en el aprovechamiento de los alumnos en este nivel y por consecuencia en la educación superior, por lo que se hace necesario emprender acciones dirigidas a subsanar dichas inconsistencias. Estamos convencidos que los jóvenes de nuevo ingreso al nivel medio superior mejorarán con la práctica su capacidad de observación, globalización, jerarquización, regulación de su propia comprensión, y por consecuencia, sus competencias matemáticas, cuya utilidad se verá reflejada, no sólo en el contexto académico, sino en cualquier ámbito de su vida cotidiana. Para los estudiantes que ingresan al bachillerato, es importante que inicien con una recapitulación de sus estudios básicos, porque el conocimiento de los números es una herramienta indispensable para comprender los procesos y fenómenos sociales y naturales, además es el fundamento para iniciar con los procesos de abstracción que requiere el álgebra, la geometría y el cálculo.

Bloque 1 | Funciones

1.1 Antecedentes

Introducción

La palabra “cálculo” proviene del latín “calculus” que significa contar con piedras. Precisamente desde que el hombre ve la necesidad de contar, comienza la historia del cálculo, es decir, de las matemáticas.

Las matemáticas son una de las ciencias más antiguas, y más útiles. El concepto de matemáticas se comenzó a formar desde que el hombre vio la necesidad de contar objetos, esta necesidad lo llevó a la creación de sistemas de numeración, inicialmente se recurría al uso de los dedos, piernas y/o piedras. Nuevamente, por la necesidad de saber del hombre, se hizo forzosa la implementación de sistemas más avanzados y que pudieran resolver la mayoría de los problemas que se presentaban con continuidad.

Ya en el siglo XVII se crean las academias, siendo éstas populares y reconocidas en el ámbito de las matemáticas, como la academia de Londres y París. En este siglo comienzan todas las disciplinas de matemáticas actuales, como la “Geometría Analítica”, los “Métodos diferenciales e infinitesimales” y el “Cálculo de Probabilidades”.

El “Cálculo Diferencial” se origina en el siglo XVII al realizar estudios sobre el movimiento, es decir, al estudiar la velocidad de los cuerpos que caen al vacío, ya que cambia de un momento a otro. La velocidad en cada instante debe calcularse teniendo en cuenta la distancia que recorre en un tiempo infinitesimalmente pequeño.

Este es el desarrollo que las matemáticas han obtenido desde que el hombre vio la necesidad de contar hasta nuestros días. Actualmente gran cantidad de matemáticos siguen en el desarrollo de las matemáticas denominadas matemáticas modernas, de donde sus conceptos son la base de la mayor parte de las ciencias actuales.

Actividades de Apertura

Antes de que tú abordes este tema, debes de comprender qué es una relación en matemáticas. En matemáticas, una relación es como un conjunto de pares ordenados, como si se tratara de coordenadas de puntos, un conjunto de pares ordenados forma una relación.

Por ejemplo, el siguiente conjunto es una relación:

$$\{(1,2),(2,3),(1,5),(7,-1),(2,-1)\}$$

En cierta forma podemos imaginar a una relación como una forma de indicar cómo se relacionan dos variables.

Por ejemplo, en una lista de asistencia, la relación consistiría en asignar un número de la lista a cada persona que se encuentra en la ella.

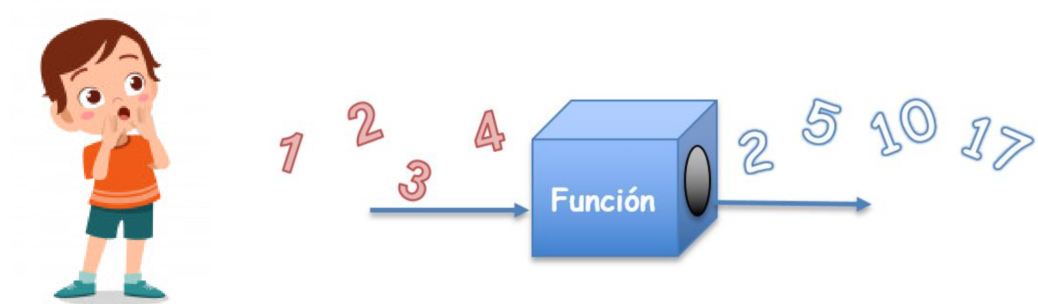
NÚMERO DE LISTA	NOMBRE DE LA PERSONA
1	ANGUIANO REYES CARMEN
2	HERNANDEZ GARCÍA ALEJANDRO

$$\{(1, ANGUIANO\ REYES\ CARMEN),(2, HERNANDEZ\ GARCÍA\ ALEJANDRO)\}$$

1.1.1. Definición de Función.

Una función del conjunto A (llamado Dominio) al conjunto B (llamado Contradominio o Rango) es una relación entre los elementos del conjunto A y el conjunto B, tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. La función es una regla que produce una correspondencia entre dos conjuntos de elementos, tales que a cada elemento del primer conjunto le corresponde **uno** y **solo un** elemento del segundo conjunto.

Imagínate una función como una máquina que transforma números. Al momento de que tú le ingresas un número a la máquina, ella te devolverá otro número, el cual es único para el valor que ingresaste.



No es posible que, al darle un mismo número, la función nos devuelva dos o más valores, pero si es posible, que nosotros le demos un valor y la función no nos pueda devolver valor alguno. En éste último caso decimos que el valor (en nuestro ejemplo “número”) que le dimos a la función no pertenece al dominio de la función, precisamente porque no lo puede transformar.

Notación Funcional: Cuando te refieras a una función ($\boldsymbol{f}$) , el dominio de la función lo representarás con $\boldsymbol{X}$ y el contradominio con $\boldsymbol{Y}$, siendo $\boldsymbol{x}$ un elemento del dominio (es decir, $x \in X$) y $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ el valor del contradominio que le corresponde al valor x del dominio de la función (es decir, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in Y$) de acuerdo a su regla de correspondencia (por ejemplo, $f(x) = 3x - 4$).

El siguiente diagrama puede ayudarte a entender mejor:

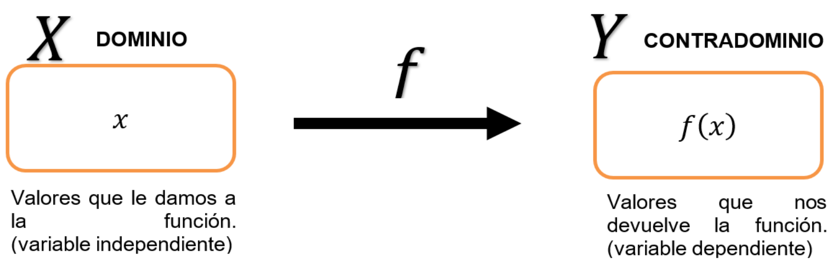


Figura 1.1.1. Relación entre Dominio y Contradominio

Las siguientes expresiones son funciones:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x + 1}$$

Otro tipo de representación, ampliamente utilizado para las funciones, es el de los **diagramas sagitales**. En éstos, cada conjunto se representa por medio de un rectángulo u óvalo, anotando dentro de él sus elementos. La correspondencia entre éstos se ilustra a través de flechas que los unen, el siguiente diagrama es un ejemplo de representación sagital de una función.

Figura 1.1.2. Funciones con Diagramas Sagitales

El concepto de función, de acuerdo con su definición, puede descomponerse de dos maneras, éstas son:

A NIVEL CONJUNTO	A NIVEL ELEMENTO
Dominio y contradominio.	Argumento e imagen.

1.1.2. Definición de Dominio

Se llama “Dominio de una función” al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.

1.1.3. Definición de Contradominio o Rango

Se llama “Contradominio de una función” al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.

1.1.4. Concepto de Argumento

Se llama “Argumento” a cada elemento del dominio, recibe el nombre de argumento de la función.

1.1.5. Concepto de Imagen

Se llama “Imagen” o “Imagen del argumento bajo la función dada” a cada elemento perteneciente al conjunto “Contradominio” el cual es correspondiente asociado a cada argumento de la función.

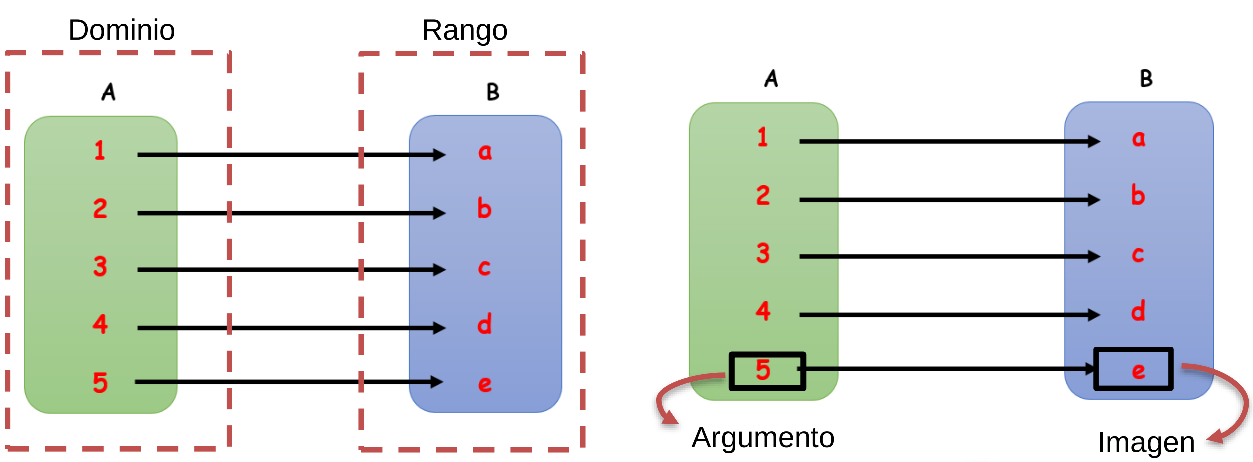


Figura 1.1.3. Dominio y rango con sus elementos

1.1.5 Gráfica de una función

La gráfica de una función es el lugar geométrico de los puntos del plano (x, y), para todo argumento x del dominio, en donde $y = f(x)$. El esbozo de la gráfica de una función puede obtenerse determinando algunos puntos de ella y uniéndolos a través de una curva. Por ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 1, -3 \leq x \leq 3$$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = x^2 + 1}$
-3	10
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5
3	10

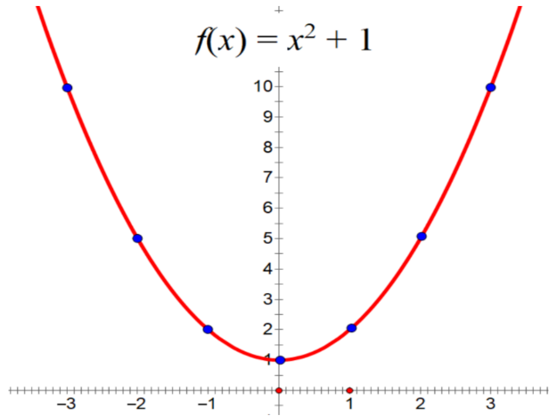


Figura 1.1.4. Gráfica de una función

Criterio de la recta vertical: Una ecuación define a una función si cada recta vertical en el sistema coordenado regular pasa a lo más por un punto de la gráfica de la ecuación. Si una recta vertical pasa por dos o más puntos de la gráfica de una ecuación, entonces la ecuación no define a una función, por lo tanto, solo sería una relación.

En la siguiente figura, cada recta vertical intersecta la gráfica de la función en exactamente un punto. Esto demuestra que a cada valor de la variable independiente "x" le corresponde exactamente un valor de la variable dependiente "y", por lo que podemos concluir que esta ecuación define a una función.

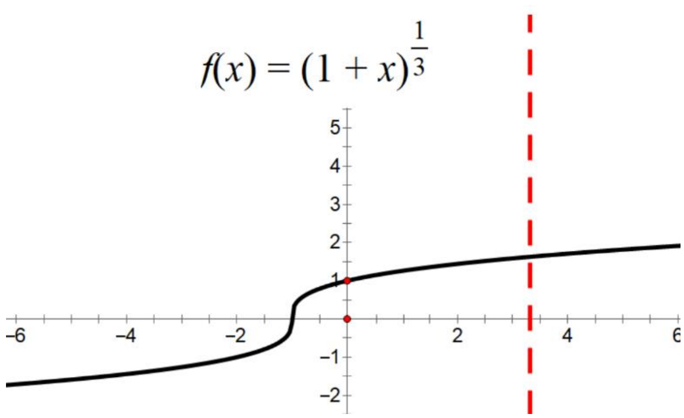
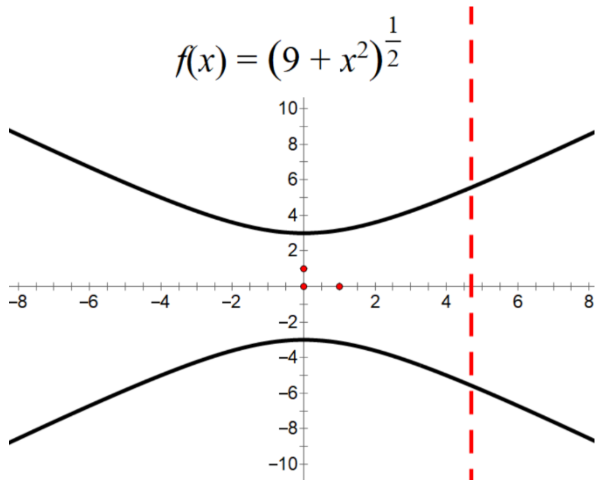


Figura 1.1.5. Criterio de la recta vertical en una función

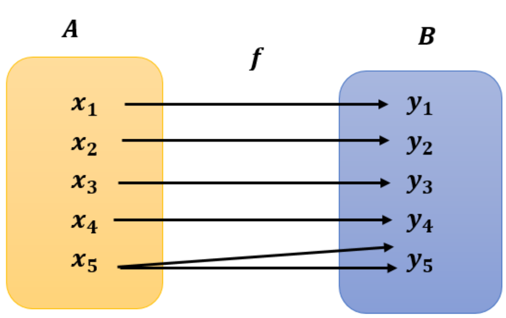
Por otra parte, la siguiente figura muestra que existen rectas verticales que intersectan la gráfica de la función en dos puntos. Esto indica que existen valores de la variable independiente "x" que corresponden a dos diferentes valores de la variable dependiente "y", lo cual confirma nuestra conclusión de que esta ecuación no define a una función, por lo tanto, solo sería una relación.



1. Tomando en cuenta el diagrama sagital que define las siguientes relaciones entre los elementos de los conjuntos dados, indica en cada caso si la relación corresponde o no a una función. Justifica tu respuesta contestando para cada ejercicio las siguientes preguntas:

- ¿Para qué elemento del conjunto A, le corresponde en todos los casos, un único elemento de B?
- ¿La asociación es tal que para cada elemento de A, le corresponden todos los casos, un único elemento de B?
- ¿Es f una función de A y B?

a)

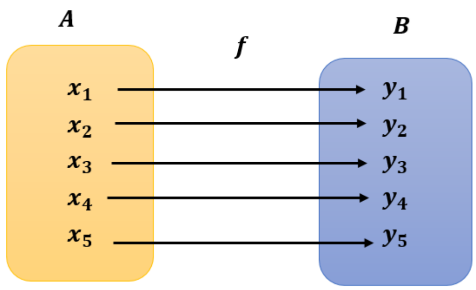


Respuesta 1. ____________________________

Respuesta 2. ____________________________

Respuesta 3. ____________________________

b)

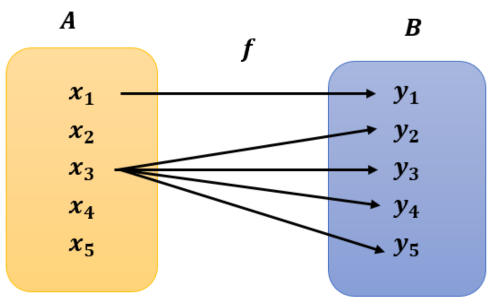


Respuesta 1. ________________________________

Respuesta 2. ________________________________

Respuesta 3. ________________________________

c)

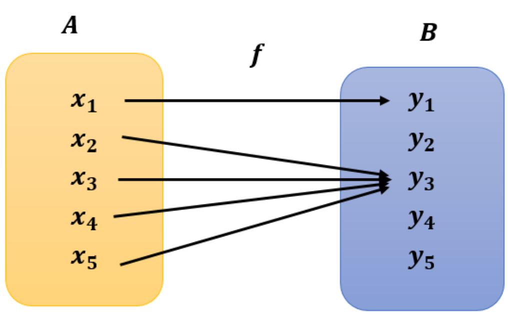


Respuesta 1. ________________________________

Respuesta 2. ________________________________

Respuesta 3. ________________________________

d)

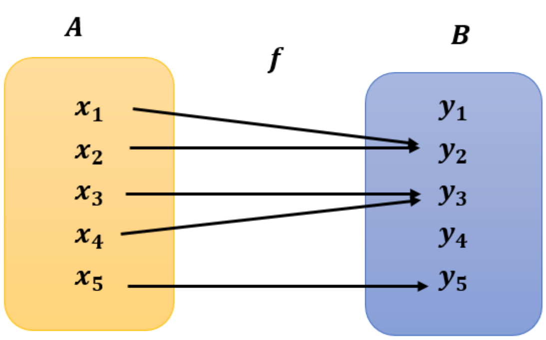


Respuesta 1. ________________________________

Respuesta 2. ________________________________

Respuesta 3. ________________________________

e)



Respuesta 1. ________________________________

Respuesta 2. ________________________________

Respuesta 3. ________________________________

Actividades de Desarrollo

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, escribe una ecuación matemática que describa la regla de correspondencia que define a la función de la variable real. Toma como guía el primer caso.

   a) Asocia a un número x, el triple de su cuadrado más 2.

   $f(x) = 3x^2 + 2$

   b) Asocia a un número real, el doble de su suma con 3.

   ____

   c) Asocia a r el cociente de la suma de él mismo más la unidad, dividido entre él mismo.

   ____

   d) Asocia a u, el producto de la suma de él mismo más uno, con su doble menos dos.

   ____

   e) Asocia a r el cociente de su triple disminuido en 2, entre su doble aumentado en uno.

   ____

2. En cada uno de los siguientes casos escribe la ecuación que describe la relación entre ambos conjuntos:

a)

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)} =$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

b)

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)} =$
-1	2
0	1
1	2
2	5
3	10

c)

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)} =$
-3	-5
-1	-1
0	1
1	3
3	7

d)

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)} =$
-5	-15
-2	-6
1	3
4	12
7	21

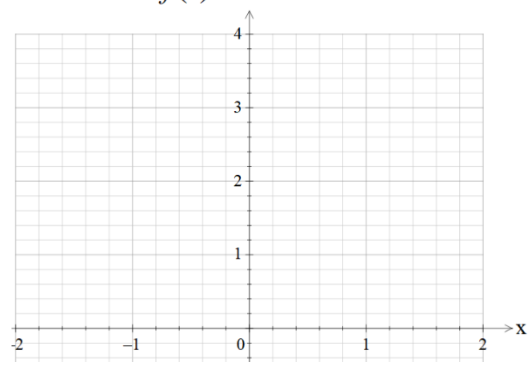
Actividades de cierre

1. Dibuja un esbozo de la gráfica de la función dada en el dominio indicado. Para ello llena la tabla propuesta. Determina si es o no una función aplicando el criterio de la línea vertical.

a) $f(x) = 4x^2 - 2x, \qquad -1 \leq x \leq 1$

x	$f(x) = 4x^2 - 2x$
-1	
-0.5	
-0.25	
0.5	
1	

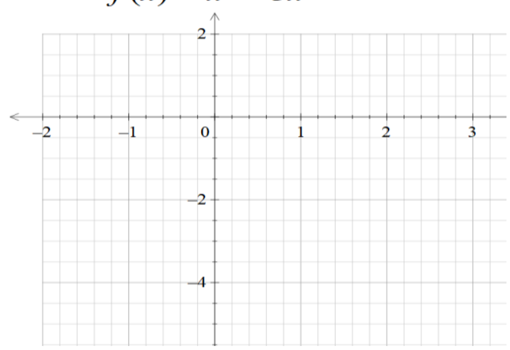
$f(x) = 4x^2 - 2x$



b) $f(x) = x^3 - 3x^2, \qquad -1 \leq x \leq 3$

x	$f(x) = x^3 - 3x^2$
-1	
0	
1	
2	
3	

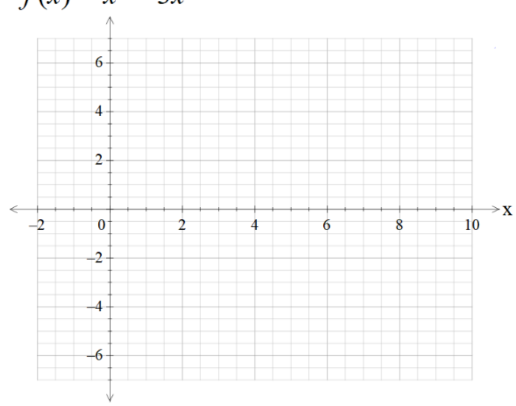
$f(x) = x^3 - 3x^2$



c) $f(x) = \pm\sqrt{4x}, \qquad 0 \leq x \leq 9$

x	$f(x) = \pm\sqrt{4x}$
0	
1	
4	
9	

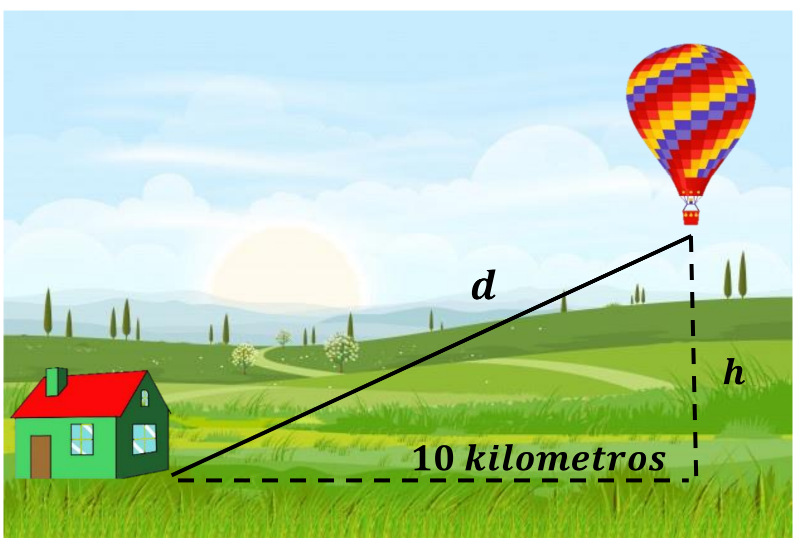
$f(x) = x^3 - 3x^2$



Actividades de contexto o Transversales

1. El costo de combustible por hora que un tren gasta en su recorrido es de $\frac{v^2}{5}$ pesos, donde v es la velocidad en kilómetros por hora. (Note que el costo depende del cuadrado de la velocidad). Otros costos, incluyendo el de mano de obra, son de $400 por hora. Expresa el costo total de un viaje de 500 kilómetros como una función de la velocidad v.

2. Se suelta un globo de observación en un punto a 10 kilometros de la estación que recibe su señal y se eleva verticalmente como se indica en la figura. Expresa la distancia $d(h)$ entre el globo y la estación de recepción como una función de la altitud h del globo.



Ejercicios Adicionales

1. En el siguiente apartado se expresan en lenguaje ordinario algunos principios físicos. Exprésalos ahora como ecuaciones matemáticas que implícitamente conlleven al concepto de función de variable real. Utiliza como símbolos las literales propuestas.

   a) El desplazamiento x recorrido por un móvil que viaja a $10\ m/seg$, en función del tiempo t.
   Respuesta: Dado que la velocidad es el cociente del desplazamiento entre el tiempo, $x = 10t$.

   b) La segunda ley de Newton expresa que "la fuerza F no equilibrada, aplicada sobre un cuerpo de masa m, es el producto de la masa por la aceleración a que produce". Denota a la fuerza como función de la aceleración para un cuerpo de masa 5 kg.
   Respuesta:
   ____
   ____

   c) La energía cinética de un cuerpo de masa m que se desplaza con velocidad v es: $Ec = \frac{mv^2}{2}$. Escribe Ec como función de la velocidad para un cuerpo de masa 10 kg.
   Respuesta:
   ____
   ____

1.2 Clasificación

1.2.1 Clasificación de las Funciones (Algebraicas y trascendentes)

Introducción

El campo de aplicación del Cálculo en matemáticas implica el planteamiento y operaciones a partir de las cuales otras ramas de la ciencia son capaces de realizar mediciones y operar con las variables de los elementos que estudian, de tal manera que además de una disciplina en sí misma, supone junto a la lógica, una de las bases del conocimiento científico.

Pero dentro del Cálculo se estudian procesos y propiedades muy diversos, estando entre ellos la relación entre dos magnitudes o dominios vinculados entre sí, en el que un resultado concreto se obtiene gracias, o en función del valor de un elemento concreto. Se trata de la existencia de funciones matemáticas, las cuales no siempre van a tener una misma manera de afectarse o relacionarse entre sí.

Es por ello que podemos hablar de diferentes tipos de funciones matemáticas, cada una con sus características propias que nos serán de mucha ayuda para la representación y solución a diferentes planteamientos de problemas y fenómenos de la vida cotidiana.

En primer lugar, clasificaremos las funciones dependiendo del carácter de la variable independiente en dos tipos: **Algebraicas y Trascendentes**.

Funciones Algebraicas: Una función algebraica es aquella cuya variable dependiente se obtiene combinando un número finito de operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces en los que se involucra la variable independiente. Ejemplos:

$$y = 2x^2 - 3x + 5 \qquad y = \sqrt{1-x} \qquad y = \frac{5}{x^2+1} \qquad s = \left(1-4t^2\right)\left(9t+2\right)$$

Este tipo de funciones corresponden a ecuaciones **polinómicas**, donde se pueden efectuar operaciones en las que interviene la variable independiente, como la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la raíz.

Las funciones polinómicas tienen una gran aplicación en la elaboración de modelos que describen fenómenos reales. Algunos de ellos son: la concentración de una sustancia en un compuesto, la distancia recorrida por un móvil a velocidad constante, la compra de cierta cantidad de objetos a un precio unitario, el salario de un trabajador más su comisión, la variación de la altura de un proyectil, entre otros.

Las funciones algebraicas son aquellas cuya regla de correspondencia (la relación que existe entre un argumento y su imagen correspondiente asociada, como ya se explicó anteriormente) es una expresión algebraica.

Funciones polinómicas: Llamamos a una función polinómica de grado n, si tiene la forma $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$. En donde n es un entero positivo.

Todas las funciones polinómicas tienen como dominio al conjunto de números reales R, pero su contradominio varía dependiendo del tipo de función que sea.

Raíz de una función: Un número r es raíz de una función si y solo si $f(r) = 0$. Y las raíces de una función representan el conjunto de argumentos (elementos del dominio) donde la gráfica de la función se intersecta con el eje x.

Función de identidad: La función de identidad se define mediante la expresión $f(x) = x$. Tiene la propiedad de que a cada argumento x del dominio le hace corresponder el mismo valor en el contradominio y por lo tanto, esta función es la recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

Función Lineal: La función lineal se define como una expresión de la forma $f(x) = mx + b$. La función lineal solo tiene una raíz en el punto $\left(-\frac{k}{m}, 0\right)$, pues si $f(x) = 0,\ mx + k = 0$, de donde, despejando $mx = -k$, y finalmente $x = -\frac{k}{m}$. La representación de este tipo de funciones es una recta. Ejemplos:

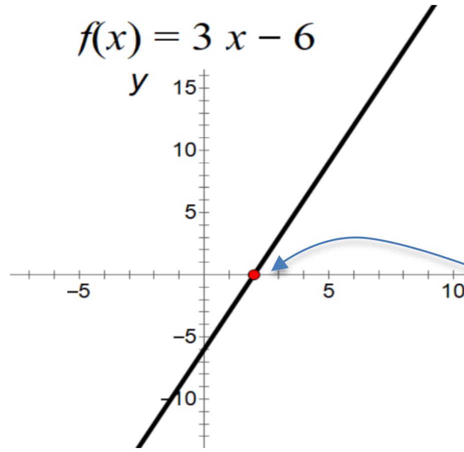
$$y = 3x + 1 \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}x + 4 \qquad\qquad s = 8w$$

Representación gráfica de la función lineal

Ejemplo: Llena la tabla, realiza la gráfica y encuentra la raíz de la función.

$f(x) = 3x - 6, \quad -4 \leq x \leq 4$

x	$f(x) = 3x - 6$
-4	-18
-3	-15
-2	-12
-1	-9
0	-6
1	-3
2	0
3	3
4	6



Raíz

$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

Figura 1.2. Función lineal

Función Constante: La función constante se define mediante la expresión $y = f(x) = k$, en donde k es un número real diferente de cero, es decir $k \neq 0$. La cual tiene la propiedad de que a cada argumento x del dominio le hace corresponder la misma imagen k. La función está definida por una constante y no interviene la variable independiente.

Ejemplos:

$y = 3 \qquad\qquad y = -6 \qquad\qquad y = \pi$

Representación gráfica de la función constante.

Grafica la siguiente función constante en el conjunto de puntos indicado.

$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}, \quad -\mathbf{4} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{4}$

x	$f(x) = 3$
-4	3
-3	3
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3
3	3
4	3

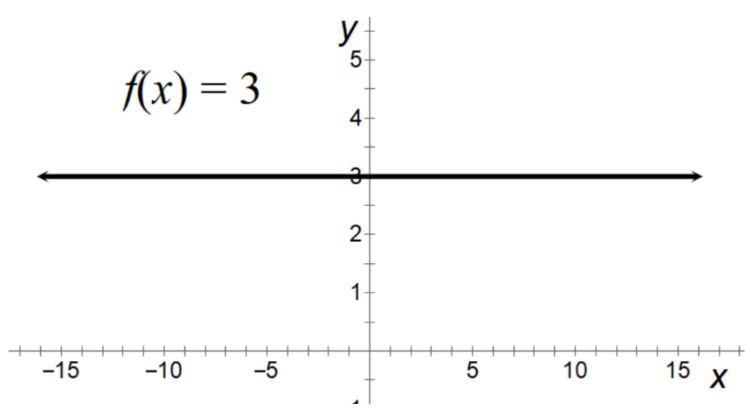


Figura 1.2.1. Función constante

Función cuadrática: La función cuadrática es un polinomio de segundo grado. Tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$**.** Viene expresada por una función polinómica de segundo grado y su representación en el plano cartesiano es una parábola.

Ejemplos:

$$y = x^2 \qquad\qquad y = 2 - x^2 \qquad\qquad y = 3x^2 + 10$$

Para hallar las raíces de una función cuadrática, utilizando la fórmula general de segundo grado que tiene la forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De la cual podemos obtener dos, una o ninguna raíz real.

Representación gráfica de la función cuadrática.

$f(x) = 2x^2 - 8x - 24, \; -4 \leq x \leq 4$

x	$f(x) = 2x^2 - 8x - 24$
-4	40
-3	18
-2	0
-1	-4
0	-24
1	-30
2	-32
3	-30
4	-24

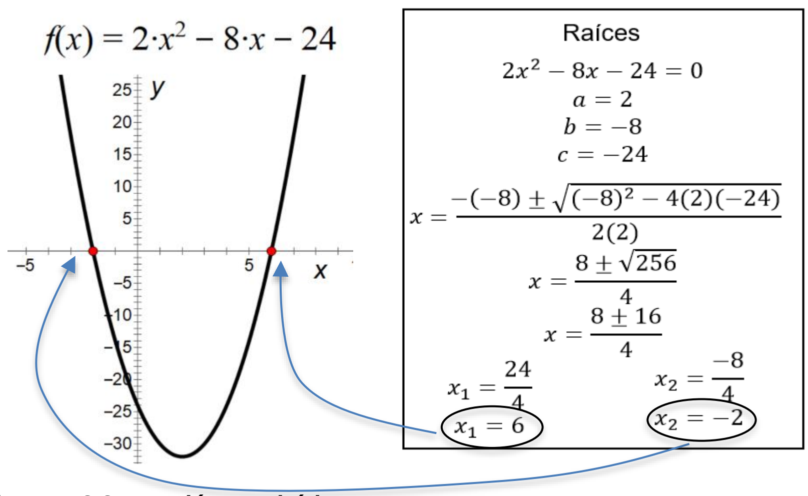


Figura 1.2.2. Función cuadrática

Función cúbica

La función cúbica se define como un polinomio de tercer grado; tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0.$

Representación gráfica de la función cúbica

$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 18x + 1, \quad -5 \leq x \leq 5}$

x	$f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 18x + 1$
-5	141
-4	137
-3	109
-2	69
-1	29
0	1
1	-3
2	29
3	109
4	249
5	461

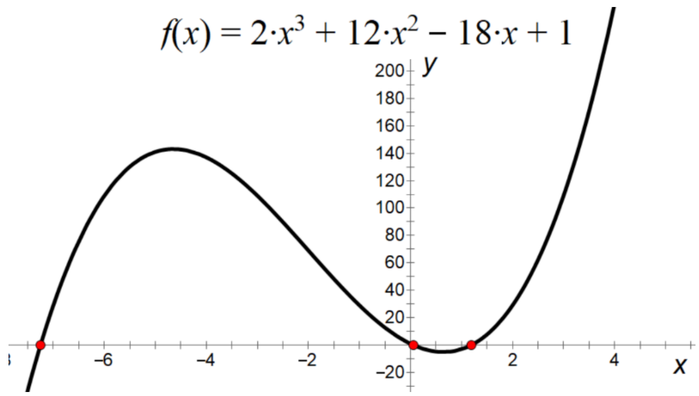


Figura 1.2.3. Función cúbica

Funciones racionales: Se expresan mediante el cociente de polinomios. Ejemplos:

$$y = x^3 + 2x^2 + 5x - 1 \qquad y = \frac{7x+8}{2} \qquad y = \frac{2}{3}x + 6x^4$$

Funciones irracionales: Vienen dadas por la raíz de una expresión polinómica, o cuando la variable independiente está elevada a exponentes fraccionarios. Ejemplos:

$$y = \sqrt{x} \qquad y = x^{1/3} + 2 \qquad y = \sqrt[4]{x+5}$$

Funciones trascendentes: Cuando la variable independiente forma parte del exponente o de un logaritmo; o simplemente se ve afectada por una relación trigonométrica. Se clasifican en:

Función exponencial: Como su nombre indica es una función en la que la variable independiente se encuentra en el exponente y cuya base es un número real. Por tanto, recibe el nombre de función exponencial. Ejemplos:

$$y = 2^x \qquad y = 3^{-2x^2} \qquad r = 2s^{x^3}$$

Función logarítmica: La inversa de la función exponencial recibe el nombre de función logarítmica, por tanto, devuelve el número al que tendríamos que elevar la base a, para obtener nuestra variable independiente. Ejemplos:

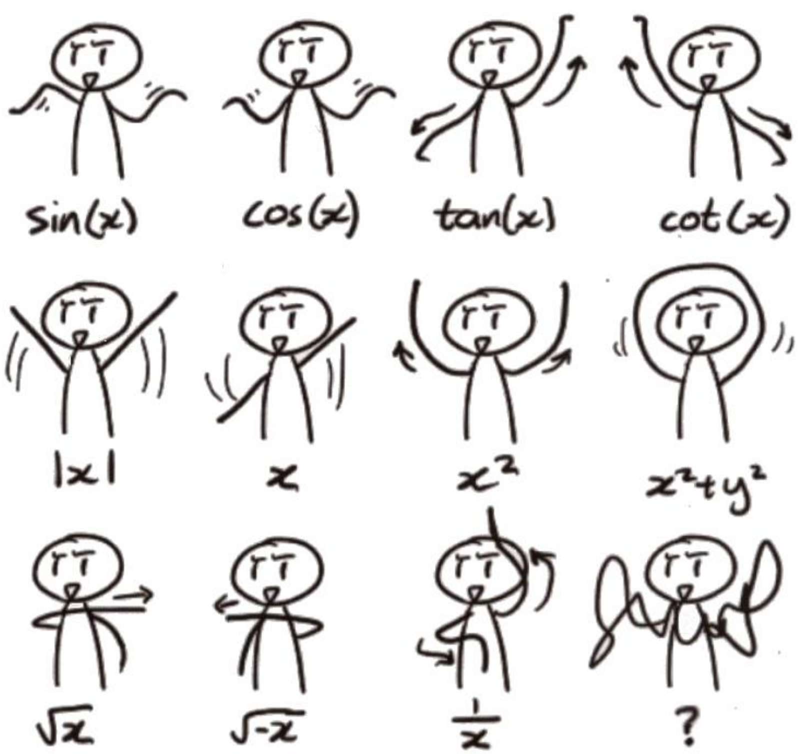
$$y = \log x \qquad y = \ln\sqrt{x+1} \qquad y = 5x^3 \ln 2x^2$$

Funciones trigonométricas directas: Las funciones trigonométricas son aquellas donde la variable independiente forma parte del ángulo en una razón trigonométrica. Ejemplos:

$$y = sen\ x \qquad y = cos^2 5x \qquad y = x\,\mathrm{Sec}(x-1)$$

Funciones trigonométricas inversas: Son las funciones inversas de las razones trigonométricas. Ejemplos:

$$y = arcSen\ x \qquad y = arc\,\mathrm{Cos}\ \ x^2 \qquad y = 2arcTg\ \ (x+4)$$



Actividades de Apertura

1. Emplea la zona cuadriculada para graficar las siguientes funciones y determina si es una función de identidad, constante o lineal, en caso de ser una función lineal, obtén la raíz de la función.

   a) $f(x) = -2x + 8, \quad 0 \leq x \leq 7$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = -2x + 8}$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

   b) $f(x) = x, \quad -4 \leq x \leq 4$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x}$
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

   c) $f(x) = -5, \quad -5 \leq x \leq 5$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = -5}$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Actividades de Desarrollo

1. Grafica las siguientes funciones cuadráticas y calcula sus raíces. Emplea la zona cuadriculada a la derecha como guía para el sistema cartesiano.

   a) $f(x) = -x^2 - 6x + 7, \quad -8 \leq x \leq 2$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = -x^2 - 6x + 7}$
-8	
-7	
-6	
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

   b) $f(x) = x^2 - 4x, \quad -2 \leq x \leq 6$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x}$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

   c) $f(x) = x^2 + 2x + 2, \quad -3 \leq x \leq 3$

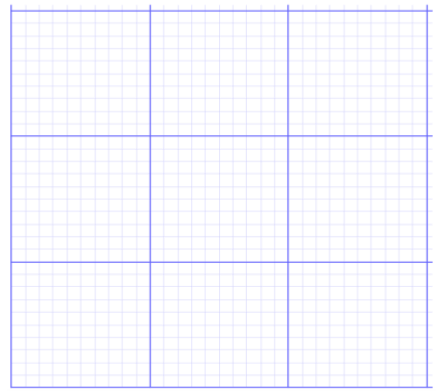
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 2}$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Actividades de cierre

1. Grafica las siguientes funciones cúbicas:

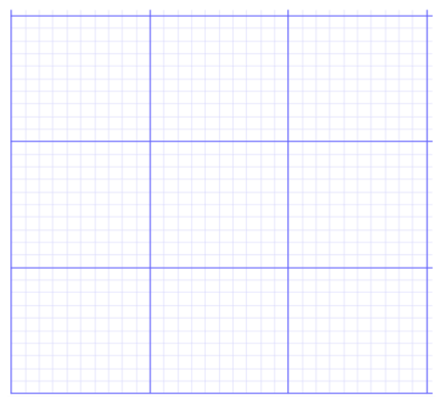
a) $f(x) = -2x^3 + 24x^2 - 72x + 5,\ \ 0 \leq x \leq 8$

x	$f(x) = -2x^3 + 24x^2 - 72x + 5$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	



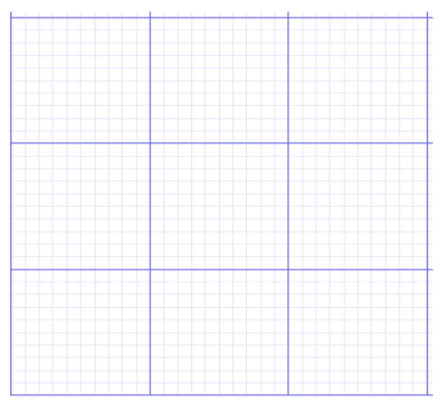
b) $f(x) = x^3 - 9x^2 - 10x,\ \ -5 \leq x \leq 5$

x	$f(x) = x^3 - 9x^2 - 10x$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	



c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ \ -3 \leq x \leq 4$

x	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



Actividades de contexto o Transversales

1. Una jugadora de voleibol realiza un pase a su compañera, el balón fue lanzado verticalmente para tener tiempo a reubicarse, de acuerdo a los especialistas, el balón subió de acuerdo a la función $y = f(t)$, en donde $f(t) = 18t - 4.9t^2$, siendo t el tiempo en segundos y $y = f(t)$ la altura en metros.

a) Haz una gráfica de función en el intervalo que va de cero a cinco segundos.

b) ¿En qué tiempo alcanza la altura máxima?

c) ¿A qué altura se encuentra a los 2 segundos?

d) ¿En qué tiempo regresa al punto de partida?

Ejercicios Adicionales

2. Un ciclista mantiene una rapidez constante de $20\frac{km}{hr}$ durante la última etapa de una competición, la cual cubre en un tiempo de 6 horas. Si al iniciar dicha etapa había recorrido 140 km:

a) Grafica la función que determina la distancia recorrida.

b) ¿Cuántos kilómetros recorre en total?

c) ¿Cuántos kilómetros le faltaba recorrer cuando habían transcurrido 2 horas?

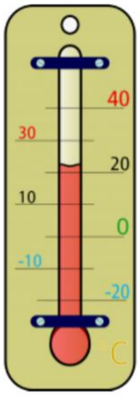
1.3 Comportamiento

Introducción

La relación que se establece entre las variables dependientes e independientes va más allá de sus representaciones como ecuaciones o funciones, dicha relación también puede analizarse en otras dos perspectivas: el marco numérico por medio de tablas que permite identificar las coordenadas de los puntos que pertenecen a una función y las gráficas que describen la trayectoria de la secuencia de dichas coordenadas de puntos unidas unas a otras.

Por otro lado, estas trayectorias observadas en el plano cartesiano muestran un comportamiento particular en cada función dando origen a las características principales que abordaremos en este apartado. En específico analizaremos fenómenos de la vida cotidiana que presentan dos comportamientos comunes: crecer o decrecer, aumentar o disminuir, subir o bajar. ¿Qué situaciones te vienen a la mente?

Actividades de Apertura



En nuestro país la temperatura se mide en grados °C (centígrados) pero en otros países como Estados Unidos de América, la temperatura se mide en grados °F (Fahrenheit), esto permite construir una relación entre estas dos unidades de medida que permite conocer sus respectivas equivalencias mediante la siguiente función: $°F = \frac{9}{5}°C + 32°$

Por ejemplo: Consideremos la siguiente tabla que muestra las diferentes mediciones en grados centígrados y su equivalencia en grados Fahrenheit

Grados °C	Función $°F = \frac{9}{5}°C + 32°$	Grados °F	Coordenadas
-20	$°F = \frac{9}{5}°(-20) + 32°$	-4	A(-20,-4)
-15	$°F = \frac{9}{5}°(-15) + 32°$	5	B(-15,5)
-5	$°F = \frac{9}{5}°(-5) + 32°$	23	C(-5,23)
0	$°F = \frac{9}{5}°(0) + 32°$	32	D(0,32)
5	$°F = \frac{9}{5}°(5) + 32°$	41	E(5,41)
10	$°F = \frac{9}{5}°(10) + 32°$	50	F(10,50)

La representación gráfica de esta función es la siguiente:

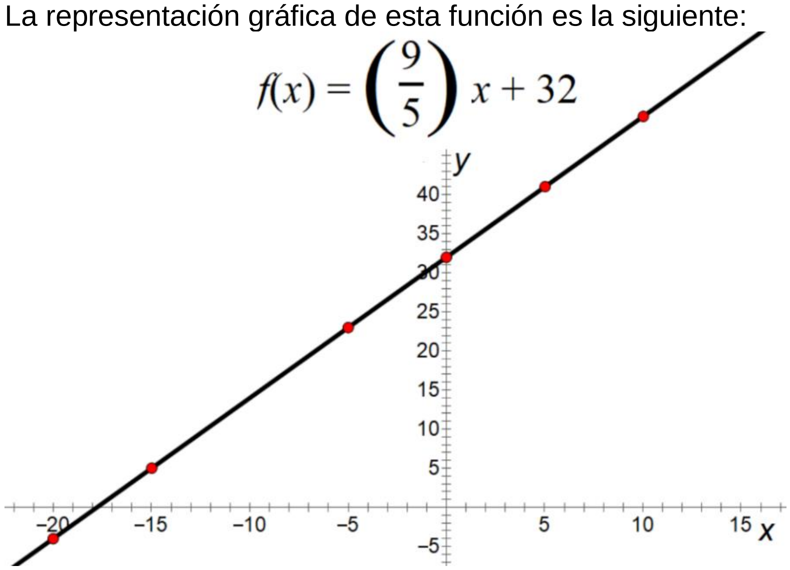


Figura 1.3. Relación entre las temperaturas en °C y °F

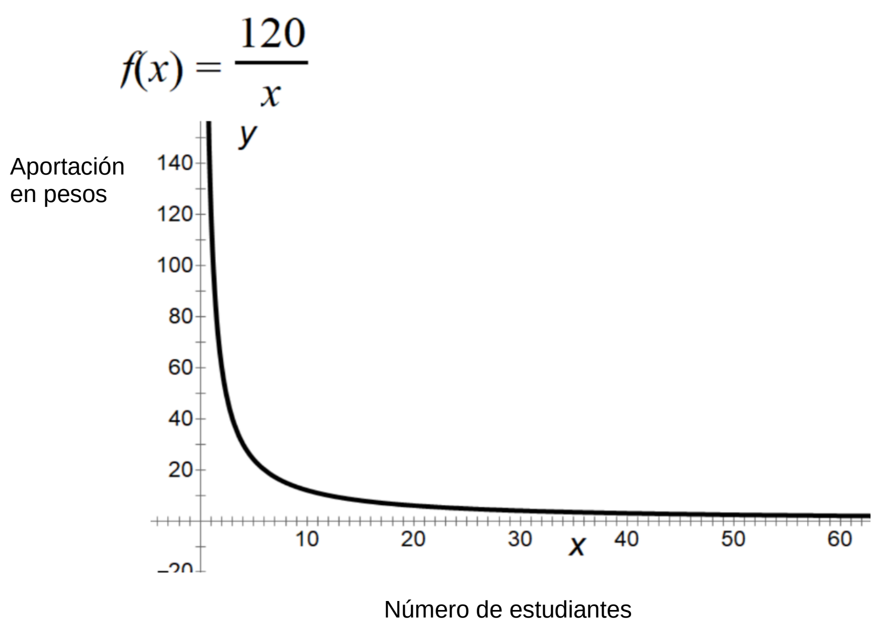
Observa que los puntos están dispuestos en forma recta y que a medida que x aumenta, el valor de y también lo hace.

1. ¿Cómo describes este comportamiento en una palabra?
2. ¿Qué otra característica puedes observar en el gráfico?

Así como estas cuestiones, pueden generarse una gran cantidad de ellas que nos permiten describir a una función.

En respuesta a la pregunta 1 se puede decir que el valor de y es **creciente** y para la pregunta 2, que al describir una línea recta se encuentra un punto a continuación del otro, es decir, que es una recta **continua,** conceptos que abordaremos más adelante.

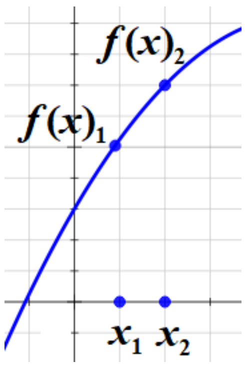
Ahora, analiza la siguiente gráfica que está dada por la función: $f(x) = \frac{120}{x}$ en la que se muestra la cooperación, de un grupo de estudiantes del CBTis 39, que requieren hacer para comprar un balón de futbol que está en promoción por solo $120 pesos en donde a mayor número de estudiantes que participe en la cooperación, será menor su aportación. Esto nos permite observar el comportamiento entre los valores de y con respecto a los valores de x, es decir si x aumenta, y disminuye o **decrece.**



Actividades de Desarrollo

Ahora analizaremos las siguientes gráficas de funciones, para ello es importante definir formalmente los siguientes conceptos:

Función creciente: una función es creciente cuando a medida que crece el valor de la variable independiente (x) crece el valor de la función f(x).



Si $x_1 < x_2$ y si $f(x_1) < f(x_2)$
Entonces f(x) es creciente.

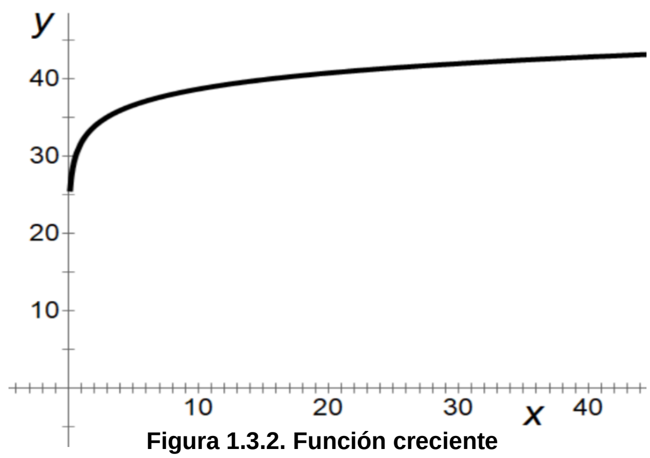
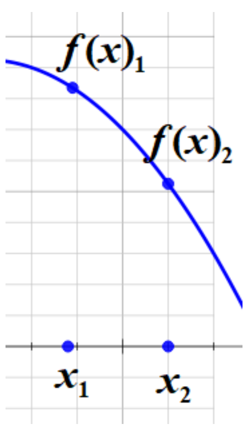


Figura 1.3.2. Función creciente

Función Decreciente Diremos que una función es decreciente cuando a medida que el valor de la variable independiente (x) aumenta, el valor de la función f(x) disminuye.



Si $x_1 < x_2$ y si $f(x_1) > f(x_2)$
Entonces f(x) es decreciente.

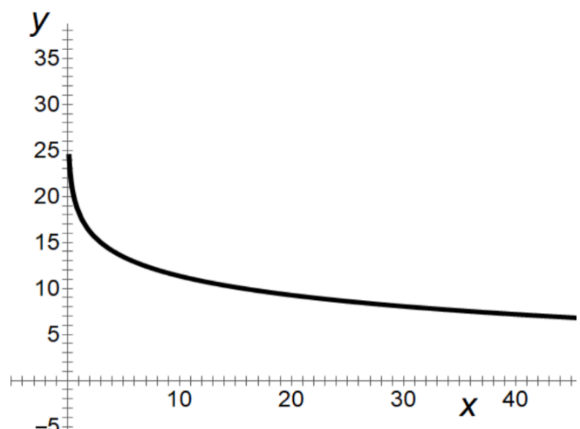


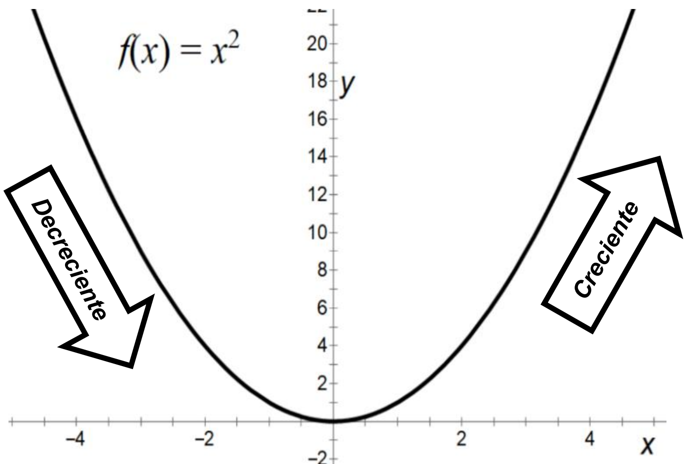
Figura 1.3.3. Función decreciente

Sin embargo, es importante señalar que una función puede ser creciente y decreciente, esto dependerá de los intervalos en los que se analice, veamos un ejemplo:

1. Determina el comportamiento de la función $f(x) = x^2$

Observemos el gráfico correspondiente: analizando la gráfica se puede observar que desde su lado izquierdo en el punto (-2,4) y en seguida el punto (-1,1) mientras que los valores de x aumentan, los valores de y disminuyen, lo que la convierte en una función decreciente, por otro lado, al llegar al comparar el punto (0,0) y el punto (2,4) el efecto es distinto, mientras que x aumenta, y también lo hace, por lo tanto es creciente a partir de ese punto.

Así que la respuesta al comportamiento de esta función es la siguiente:



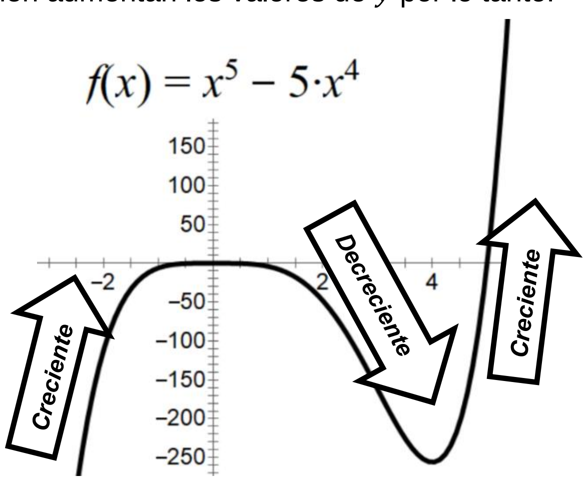
$f(x)$ *es* ***Decreciente*** *en el intervalo* $(-\infty, 0)$

$f(x)$ *es* ***Creciente*** *en el intervalo* $(0, \infty)$

Figura 1.3.4. Intervalos creciente y decreciente en una función

2.- Determina el comportamiento de la función $f(x) = x^5 - 5x^4$

En esta gráfica se puede apreciar que desde la parte izquierda al aumentar los valores de x también aumentan los valores de y por lo tanto:



$f(x)$ *es Creciente en:*

$(-\infty, 0)$ y $(4, \infty)$

$f(x)$ *es Decreciente en:*

$(0,4)$

Figura 1.3.5. Intervalos creciente y decreciente en una función

Nota: *En esta sección nos enfocaremos en el sentido de este comportamiento basados en los valores numéricos de las variables x e y, y más adelante se abordarán con un criterio más específico relacionados a los conceptos de* ***derivación de funciones****.*

Concepto de continuidad: Intuitivamente, una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel.

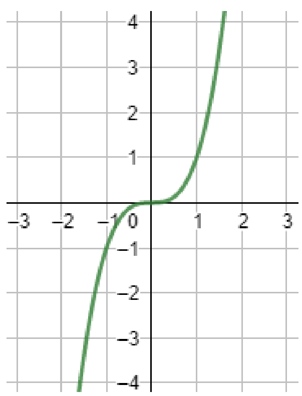
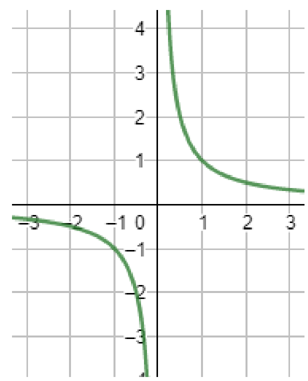
Ejemplo de función continúa: $f(x) = x^3$	Ejemplo de función **no** continua: $f(x) = \frac{1}{x}$
Gráfica: 	Gráfica: 

Figura 1.3.6. Funciones continuas y discontinuas

Actividades de cierre

1. Responde cada una de las siguientes preguntas y grafica en cada caso en tu cuaderno de notas:
   a) ¿Cuándo se dice que una función es Creciente? ________________________
   b) ¿Cuándo se dice que una función es Decreciente? ______________________
   c) ¿Puede una misma función ser Creciente y Decreciente? _________________

2. Grafica las siguientes funciones y determina los intervalos en los que son crecientes y/o Decrecientes:

   a) $f(x) = -2x^2 + 4$
   b) $f(x) = 2x^2 + 4x$
   c) $f(x) = 2x^3 + 4$
   d) $f(x) = 3x^5 + 4x^4$

3. Construye la gráfica de las siguientes funciones e indica cuáles de ellas son continuas o discontinuas:
   a) $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$
   b) $f(x) = 3x^3$
   c) $f(x) = \frac{1}{x}$
   d) $f(x) = \ln(2x + 1)$

4. Se estima que la población de una ciudad será $750 + 25t + 0.1t^2$ miles de personas en t años

a partir del presente. Los ecologistas estiman que el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire de la ciudad será $1 + 0.4x$ ppm (partes por millón) cuando la población sea de x miles de personas. Exprese el nivel de monóxido de carbono como una función de tiempo t y determina los intervalos donde la función es creciente y/o decreciente.

El ingreso I(x) (en miles de pesos) que una compañía recibe por la venta de x miles de unidades está dado por $I(x) = 5x - x^2$. El nivel x de ventas es a su vez una función $f(d)$ del número d de pesos gastados en publicidad, donde:

$$f(d) = 6\left(1 - \frac{200}{d + 200}\right)$$

Expresa el ingreso como una función de la cantidad gastada en publicidad y determina los intervalos en donde la función es creciente y/o decreciente.

Actividades de contexto o Transversales

1. Un equipo de mecatrónica del CBTis 168 ha desarrollado una podadora de césped como

parte del concurso estatal de prototipos tecnológicos, la prueba final consiste en comprobar el rendimiento pronosticado que es de 3 m^2 por minuto. Para realizar esta prueba utilizarán el jardín de una Quinta con una superficie de $120m^2$. Modela la función que representa esta prueba, construye la gráfica correspondiente y describe su comportamiento.

Modelo matemático.

Sabemos que la superficie de césped es de $120\ m^2$.

El rendimiento de la podadora es de $300\ m^2\ por\ minuto$

La variable a utilizar es el tiempo en minutos, así que emplearemos la variable t como variable independiente.

La variable dependiente es la superficie, así que emplearemos la función $S(t)$

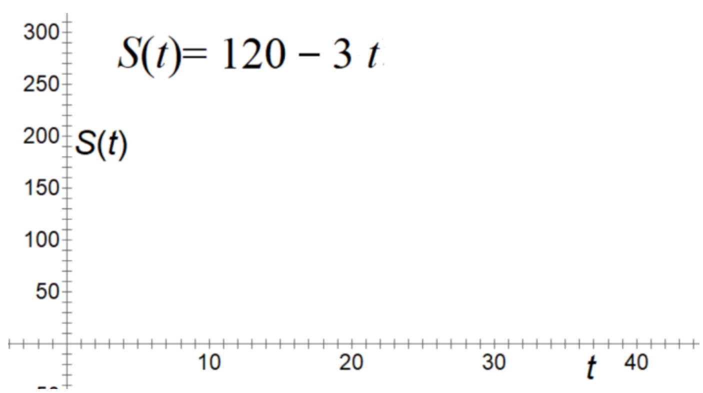
Entonces la función que representa a esta prueba es:

$$\boldsymbol{S(t) = 120 - 3t}$$

a) Completa la siguiente tabla para los tiempos indicados

Tiempo en minutos	Superficie por podar
0	
5	
10	
15	
20	
25	
30	
35	
40	

b) Grafica los valores de la tabla



c) Selecciona la opción correcta o completa en cada enunciado:

i. La función $S(t)$ es <u>creciente/decreciente</u> porque a medida que el tiempo <u>aumenta/disminuye</u>, la superficie del césped <u>aumenta/disminuye.</u>

ii. El gráfico indica que al iniciar el trabajo de la podadora hay ______ m^2 de césped por cortar.

iii. Al transcurrir 20 minutos de trabajo, la podadora ha cortado ______ m^2 de césped.

iii. La podadora debe trabajar un total de _______ minutos para poder cortar todo el césped.

¿Verdad que es interesante?

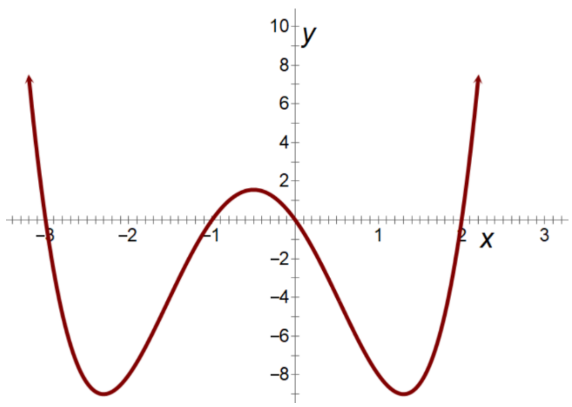
Pues efectivamente se puede conocer el comportamiento de muchas actividades de tu vida cotidiana gracias a la gráfica que las representa.

Intenta llevar a cabo este procedimiento para alguna actividad que realizas regularmente.

Ejercicios Adicionales

1. Identifica los intervalos donde el siguiente grafico es creciente o decreciente

a) $f(x) = x^4 + 2\cdot x^3 - 5\cdot x^2 - 6\cdot x$



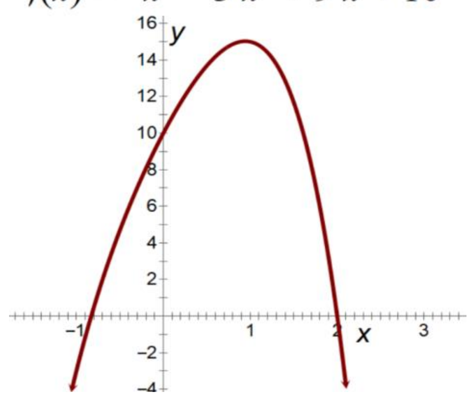
Creciente en los intervalos:

____

Decreciente en los intervalos:

____

b) $f(x) = -x^4 - 3\cdot x^2 + 9\cdot x + 10$



Creciente en el intervalo:

____

Decreciente en el intervalo:

____

1.4 Operaciones

Introducción

Cuando se consideran dos o más funciones en el planteamiento de problemas, podríamos obtener nuevas funciones combinándolas con las operaciones básicas de suma, diferencia, producto y cociente. También podremos obtener nuevas funciones realizando lo que en cálculo se conoce como composición de funciones.

Actividades de apertura

Al igual que con los números realizas operaciones de suma, resta, multiplicación, división, lo mismo puedes hacer si tienes dos o más funciones, por ejemplo; si tienes las funciones f y g, , si realizas la suma de ambas obtienes el resultado de una nueva función $f + g$.

1. Realiza las operaciones algebraicas que se indican en los siguientes polinomios:

   a) Suma los polinomios $3x + 9y - 4z$; $6x + 3y + 9z$

   b) De $4a^2 - 9a + 3$ resta $9a^2 - 5a + 7$

   c) Multiplica $7x^2 - 5y^2 - 4xy$ con $3x - 2y$

   d) ¿Cuál es el área de un cuadrado que mide por lado $\frac{2}{3}x + \frac{7}{2}y$

Actividades de Desarrollo

Suma de funciones.

Sean f y g dos funciones con dominio D_f y D_g, respectivamente, entonces $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, con dominio $D_f \cap D_g$

Ejemplo 1: Realiza la suma de las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$ y $\boldsymbol{g(x) = x - 6}$

Para la suma de funciones tienes

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = f(x) + g(x)}$$

Como buscas la suma $(f + g)(x)$, para que la realices, sustituye el valor de $f(x)\ y\ g(x)$

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = \quad f(x) \quad + \quad g(x)}$$

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = \quad x^2 - 4x + 3 \quad + \quad x - 6}$$

Identifica y reduce los términos semejantes:

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = \quad x^2 - 3x - 3}$$

El resultado de la suma $f(x)\ y\ g(x)$ es:

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = x^2 - 3x - 3}$$

Ejemplo 2: Sean las funciones $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{4 - x^2}}$ y $\boldsymbol{g(x) = x}$, realiza $\boldsymbol{f(x) + g(x)}$

Para la suma de funciones tienes

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = f(x) + g(x)}$$

Como buscas la suma $(f + g)(x)$, para que la realices, sustituye el valor de $f(x)\ y\ g(x)$

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = \quad f(x) \quad + \quad g(x)}$$

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = \quad \sqrt{4 - x^2} \quad + \quad x}$$

Como puedes observar en este caso no hay términos semejantes, por lo que el resultado es:

$$\boldsymbol{(f + g)(x) = \quad \sqrt{4 - x^2} + x}$$

Ejemplo 3: Ahora analiza, si tenemos dos funciones f y g ¿es lo mismo $\boldsymbol{f+g}$ que $\boldsymbol{g+f}$?; para ello toma las funciones del ejemplo 1 de suma de funciones y realiza $g(x)+f(x)$

$$\boldsymbol{f(x)=x^2-4x+3 \text{ y } g(x)=x-6}$$

Para este caso, en la suma de funciones tienes que $(g+f)(x)=g(x)+f(x)$.

Como buscas la suma $(g+f)(x)$; para que la realices sustituye el valor de $g(x)\ y\ f(x)$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{g+f})(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{g(x)} \quad + \quad \boldsymbol{f(x)}\\ (\boldsymbol{g+f})(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x-6} \quad + \quad \boldsymbol{x^2-4x+3}\end{aligned}$$

Identifica y reduce los términos semejantes, el resultado de la suma $g(x)\ y\ f(x)$ es:

$$\boldsymbol{(g+f)(x)=x^2-3x-3}$$

Como puedes observar es lo mismo $\boldsymbol{f+g}$ que $\boldsymbol{g+f}$ para las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$

Resta de funciones.

Sean f y g dos funciones con dominio D_f y D_g, respectivamente, entonces $f(x)-g(x)=(f-g)(x)$, con dominio $D_f \cap D_g$

Ejemplo 1: Sea $\boldsymbol{f(x)=4x+2}$ **y** $\boldsymbol{g(x)=-2x+6.}$ Calcular $\boldsymbol{f(x)\ menos\ g(x)}$

Para la resta de dos funciones tienes que,

$$\boldsymbol{(f-g)(x)=f(x)-g(x)}$$

Remplaza el valor de $f(x)\ y\ g(x)$, como se trata de una resta la función $g(x)$ se escribe entre paréntesis ya que el signo de la resta (menos) afecta a todos sus términos:

$$\boldsymbol{(f-g)(x)} = \boldsymbol{f(x)} \quad - \quad \boldsymbol{g(x)}$$

$$\boldsymbol{(f-g)(x)} = \boldsymbol{4x+2} \quad - \quad \boldsymbol{(-2x+6)}$$

La función $f(x)$ se escribe sin cambios porque no hay elementos que la afecten.
Multiplica el signo menos por cada uno de los términos de la función $g(x)$:

$$\boldsymbol{(f-g)(x)=\quad 4x+2+2x-6}$$

Identifica y suma los términos semejantes, la función resultante de restar $g(x)=-2x+6$ de $f(x)=4x+2$ es:

$$\boldsymbol{(f-g)(x)=6x-4}$$

Ejemplo 2: Sea $\boldsymbol{f(x) = x + \sqrt{x}\ y\ g(x) = \sqrt{x}.}$ Calcular $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$

Para la resta de dos funciones tienes que:

$$\boldsymbol{(f-g)(x) = f(x) - g(x)}$$

Remplaza el valor de $f(x)\ y\ g(x)$. Como se trata de una resta, la función $g(x)$ se escribe entre paréntesis ya que el signo de la resta (menos) afecta a todos sus términos.

$$\boldsymbol{(f-g)(x) = \quad f(x) \quad - \quad g(x)}$$

$$\boldsymbol{(f-g)(x) = \quad x + \sqrt{x} \quad - \quad (\sqrt{x})}$$

La función $f(x)$ se escribe sin cambios porque no hay elementos que la afecten.

Multiplica el signo menos por cada uno de los términos de la función $g(x)$:

$$\boldsymbol{(f-g)(x) = \quad x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}$$

Identifica y suma los términos semejantes, el resultado de $(f-g)(x)$ es:

$$\boldsymbol{(f-g)(x) = x}$$

Ejemplo 3**:** Si tenemos dos funciones f y g ¿es lo mismo $\boldsymbol{f-g}$ que $\boldsymbol{g-f}$?, utiliza las funciones del ejemplo 1 de resta de funciones para calcular $g(x) - f(x)$,

$$\boldsymbol{f(x) = 4x + 2 \text{ y } g(x) = -2x + 6}$$

Vas a restar $\boldsymbol{g-f}$, tienes:

$$\boldsymbol{(g-f)(x) = g(x) - f(x)}$$

Remplaza el valor de $g(x)\ y\ f(x)$. Como se trata de una resta la función $f(x)$ se escribe entre paréntesis ya que el signo de la resta (menos) afecta a todos sus términos.

$$\boldsymbol{(g-f)(x) = \quad g(x) \quad - \quad f(x)}$$

$$\boldsymbol{(g-f)(x) = \quad -2x + 6 \quad - \quad (4x + 2)}$$

La función $g(x)$ se escribe sin cambios porque no hay elementos que la afecten.

Multiplica el signo menos por cada uno de los términos de la función $f(x)$:

$$\boldsymbol{(g-f)(x) = \quad -2x + 6 - 4x - 2}$$

Identifica y suma los términos semejantes, la función resultante de $g - f$ es:

$$\boldsymbol{(g-f)(x) = -6x + 4}$$

Compara el resultado con el del ejercicio 1 de resta de funciones, observa que no es el mismo resultado en ambos casos, lo que quiere decir que si tienes las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ no es lo mismo calcular $\boldsymbol{f-g}$ que $\boldsymbol{g-f}$

Multiplicación de funciones

Sean f y g dos funciones con dominio D_f y D_g, respectivamente, entonces $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, con dominio $D_f \cap D_g$

Ejemplo1: Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$ y $\boldsymbol{g(x) = x - 6}$, determina $\boldsymbol{f(x) \cdot g(x)}$

Tienes que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,

Remplaza el valor de las funciones $f(x)\ y\ g(x)$; como se trata de una multiplicación, las funciones $f(x)\ y\ g(x)$ deben de ir entre paréntesis para indicar que se está realizando una multiplicación:

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(x) = \qquad f(x) \qquad\qquad g(x)}$$

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(x) = \quad (x^2 - 4x + 3\,) \qquad (x - 6)}$$

Realiza la multiplicación de las funciones,

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(x) = \quad x^3 - 6x^2 - 4x^2 + 24x + 3x - 18}$$

Identifica y suma los términos semejantes, la función que resulta de multiplicar $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = x - 6$ es:

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(x) = x^3 - 10x^2 + 27x - 18}$$

Ejemplo 2: Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 6x}$ y $\boldsymbol{g(x) = 2x + 1}$, determina $\boldsymbol{f(x) \cdot g(x)}$

Tienes que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Remplaza el valor de las funciones $f(x)\ y\ g(x)$. Como se trata de una multiplicación, las funciones $f(x)\ y\ g(x)$ deben de ir entre paréntesis para indicar que se está realizando una multiplicación:

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(x) = \qquad f(x) \qquad\qquad g(x)}$$

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(x) = \quad (x^2 + 6x) \qquad (2x + 1)}$$

Realiza la multiplicación de las funciones,

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(x) = \quad 2x^3 + x^2 + 12x^2 + 6x}$$

Identifica y suma los términos semejantes, la función que resulta de multiplicar $f(x) = x^2 + 6x$ y $g(x) = 2x + 1$ es:

$$\boldsymbol{(f \cdot g)(x) = 2x^3 + 13x^2 + 6x}$$

Ejemplo 3: Si tienes dos funciones f y g ¿es lo mismo $\boldsymbol{f\cdot g}$ que $\boldsymbol{g\cdot f}$?, utiliza las funciones del ejemplo 1 de multiplicación de funciones para que compares los resultados.

Calcular $g(x)\cdot f(x)$, $\boldsymbol{f(x)=x^2-4x+3}$ y $\boldsymbol{g(x)=x-6}$

Vas a calcular $g\cdot f$ tienes: $(g\cdot f)(x)=g(x)\cdot f(x)$

Sustituye el valor de las funciones $g(x)\ y\ f(x)$: como se trata de una multiplicación, las funciones $g(x)\ y\ f(x)$ deben de ir entre paréntesis para indicar que se está realizando una multiplicación:

$$\boldsymbol{(g\cdot f)(x)=\quad g(x)\qquad f(x)}$$

$$\boldsymbol{(g\cdot f)(x)=\quad (x-6)\qquad (x^2-4x+3\ )}$$

Realiza la multiplicación de las funciones,

$$\boldsymbol{(g\cdot f)(x)=\quad x^3-4x^2+3x-6x^2+24x-18}$$

Reduce los términos semejantes,

$$\boldsymbol{(g\cdot f)(x)=\quad x^3-10x^2+27x-18}$$

La función que resulta de multiplicar $g(x)=x-6$ y $f(x)=x^2-4x+3$ es:

$$\boldsymbol{(g\cdot f)(x)=x^3-10x^2+27x-18}$$

Observa que el resultado del ejercicio es igual al del ejercicio 1 de multiplicación de funciones, entonces si tienes una función $\boldsymbol{f}$ y una función $\boldsymbol{g}$ se obtienen el mismo resultado para $\boldsymbol{(g\cdot f)(x)}$ y $\boldsymbol{(g\cdot f)(x)}$

División de funciones

Sean f y g dos funciones con dominio D_f y D_g, respectivamente, entonces $\boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)}}=\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)(x)}$, con dominio $\{x\in D_f\cap D_g|g(x)\neq 0\}$

Ejemplo 1: Realiza la división de $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\boldsymbol{f(x)=x^4+x^2-6}$ y $\boldsymbol{g(x)=x^2+3}$

Tienes para la división que $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Remplaza el valor de las funciones $f(x)\ y\ g(x)$:

$$\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^4+x^2-6}{x^2+3}$$

Para que realices la división, factoriza la función del numerador, es decir x^4+x^2-6. Para ello debes buscar dos números que multiplicados den -6 y sumados o, restados 1

Los números que buscas son:

$$+3-2=1$$
$$(+3)(-2)=-6$$

Ahora obtén la raíz cuadrada de x^4

$$\sqrt{x^4}=x^2$$

La factorización utiliza los valores anteriores $x^4+x^2-6=(x^2+3)(x^2-2)$, remplaza el resultado de la factorización,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^4+x^2-6}{x^2+3}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{(x^2+3)(x^2-2)}{x^2+3}$$

Simplifica:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x^2-2$$

Ejemplo 2: Realiza la división de $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\boldsymbol{f(x)=x^2+9x+20}$ y $\boldsymbol{g(x)=x+4}$

Tienes para la división que $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Sustituye el valor de las funciones $f(x)\ y\ g(x)$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+9x+20}{x+4}$$

Para que realices la división, factoriza la función del numerador, es decir $x^2+9x+20$.
$x^2+9x+20\ =(x+5)(x+4)$,

remplaza el resultado de la factorización

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+9x+20}{x+4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{(x+5)(x+4)}{x+4}$$

Simplifica:

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{5}$$

Ejemplo 3: Si tienes dos funciones f y g ¿es lo mismo $\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ que $\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}$?, utiliza las funciones del ejemplo 1 de división de funciones para calcular $\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}$ y compares ambos resultados.

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^4} + \boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{6} \text{ y } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{3}$$

Como vas a calcular $\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}$ tienes que $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

Remplaza el valor de las funciones $g(x)\ y\ f(x)$:

$$\left(\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x^4} + \boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{6}}$$

Para que realices la división, factoriza la función del denominador, es decir $x^4 + x^2 - 6$.

$$\boldsymbol{x^4} + \boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{6} = (\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{3})(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{2}),$$

Remplaza el resultado de la factorización;

$$\left(\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x^4} + \boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{6}}$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{3}}{(\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{3})(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{2})}$$

Simplifica:

$$\left(\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{2}}$$

Compara el resultado con el del ejercicio 1 de división de funciones. Observa que no es el mismo resultado en ambos casos, lo que quiere decir que si tienes las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ no es lo mismo calcular $\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ que $\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{f}}$

Función composición

Sean f y g dos funciones con dominio D_f y D_g, respectivamente, entonces definen una nueva función, que recibe el nombre de función composición de f con g, se representa:

$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]$, con dominio $\{x | x \in D_g\ y\ g(x) \in D_f\}$

Ejemplo 1: Determina $\boldsymbol{f \circ g}$, para $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6}$ y $\boldsymbol{g(x) = 2x + 1}$

Como vas a determinar $f \circ g$ la composición es:

$$\boldsymbol{(f \circ g)(x) = f[g(x)]}$$

Significa que en la función $f(x)$ vas a evaluar la función $g(x)$;

$$\boldsymbol{(f \circ g)(x) = f[g(x)]}$$

$$\boldsymbol{f[g(x)] = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 6}$$

Realiza las operaciones, para este ejemplo debes desarrollar el binomio al cuadrado,

$$\boldsymbol{f[g(x)] = f(2x+1) = (2x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2 - 6 = 4x^2 + 4x + 1 - 6}$$

Identifica y reduce términos semejantes; la función composición que obtienes es:

$$\boldsymbol{f[g(x)] = f(2x+1) = 4x^2 + 4x - 5}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x+1) = \boldsymbol{4x^2 + 4x - 5}$$

Ejemplo 2: Determina $\boldsymbol{f \circ g}$, para: $\boldsymbol{f(x) = x + 6}$ y $\boldsymbol{g(x) = \frac{x}{x-2}}$

Como vas a determinar $f \circ g$ la composición es:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Significa que en la función $f(x)$ vas a evaluar la función $g(x)$,

$$\boldsymbol{(f \circ g)(x) = f[g(x)]}$$

$$\boldsymbol{f[g(x)] = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{x}{x-2} + 6}$$

Realiza las operaciones, para este ejemplo debes desarrollar la suma:

$$\boldsymbol{f[g(x)] = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{x}{x-2} + 6}$$

$$\boldsymbol{f[g(x)] = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{x}{x-2} + \frac{6}{1} = \frac{(x)(1) + (6)(x-2)}{(x-2)(1)} = \frac{x + 6x - 12}{x-2} = \frac{7x - 12}{x-2}}$$

La función composición que obtienes es:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \boldsymbol{\frac{7x-12}{x-2}}$$

Ejemplo 3: Si tienes dos funciones f y g ¿es lo mismo calcular $f \circ g$ que $g \circ f$?, utiliza las funciones del ejemplo 1 de composición de funciones para calcular $g \circ f$ y compares ambos resultados.

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6}$ y $\boldsymbol{g(x) = 2x + 1}$

Vas a determinar $g \circ f$ la composición es:

$$\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g[f(x)]}$$

Significa que en la función $g(x)$ vas a evaluar la función $f(x)$,

$$\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g[f(x)]}$$

$$\boldsymbol{g[f(x)] = g(x^2 - 6) = 2(x^2 - 6) + 1}$$

Realiza las operaciones:

$$\boldsymbol{g[f(x)] = g(x^2 - 6) = 2x^2 - 12 + 1}$$

Simplifica los términos semejantes,

$$\boldsymbol{g[f(x)] = g(x^2 - 6) = 2x^2 - 11}$$

La función composición que obtienes es:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 - 6) = \boldsymbol{2x^2 - 11}$$

Compara el resultado con el del ejercicio 1 de composición de funciones, observa que no es el mismo resultado en ambos casos, lo que quiere decir que si tienes las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ no es lo mismo calcular $\boldsymbol{f \circ g}$ que $\boldsymbol{g \circ f}$.

Actividades de cierre

Resuelve correctamente los siguientes ejercicios:

1. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x - 21$, $g(x) = x + 3$, calcula:

   a) $f(x) + g(x) =$

   b) $f(x) - g(x) =$

   c) $g(x) - f(x) =$

   d) $\frac{\boldsymbol{g(x)}}{\boldsymbol{f(x)}} =$

   e) $\frac{f(x)}{g(x)} =$

   f) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] =$

   g) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] =$

Actividades de contexto o Transversales

Analiza el siguiente ejemplo en el que se aplican las operaciones con funciones estudiadas anteriormente:

Un agricultor siembra maíz por sistema de irrigación (riego por goteo). La producción en kilogramos (k) por hectárea (h) está dada por la función $k(h) = 9200h - 1600$; la venta (v) en pesos por kilogramo (k) la obtiene mediante la función $v(k) = 5.5k + 7600$

a) ¿Cuánto obtiene de la venta si siembra 8 hectáreas?

Determina la cantidad de kg que cosecha por las 8 hectáreas, utiliza la función $k(h) = 9200h - 1600$ para $h = 8$.

Evaluamos en la función $h = 8$
$k(8) = 9200(8) - 1600$
$k(8) = 9200(8) - 1600$
$k(8) = 73600 - 1600$
$k(8) = 72000$

Cosecha 72,000 kg por las 8 hectáreas

Para determinar la venta por 72,000 kg (valor de k) utiliza la función para la venta $v(k) = 5.5k + 7600$.

Evaluamos $k = 72{,}000$
$v(k) = 5.5(72000) + 7600$
$v(k) = 396000 + 7600$
$v(k) = 403600$

Obtiene una venta de $403,600 por las 8 hectáreas cosechadas.

b) Determina la función para obtener la venta en términos de las hectáreas sembradas y calcula la venta para 8 hectáreas sembradas.

Para determinar la función utiliza la **operación función composición** de las funciones:

$k(h) = 9200h - 1600$
$v(k) = 5.5k + 7600$

La operación composición es,

$(v \circ k)(h) = v[k(h)] = v(9200h - 1600) = 5.5(9200h - 1600) + 7600$

$= 50600h - 8800 + 7600 = 50600h - 1200$

$(\boldsymbol{v \circ k})(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{v}[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h})] = \mathbf{50600}\boldsymbol{h} - \mathbf{1200}$ es la función que permite calcular la venta de acuerdo con las hectáreas sembradas.

Utiliza la función que obtuviste para calcular la venta para las 8 hectáreas sembradas $h = 8$
$(v \circ k)(8) = v[k(8)] = 50600(8) - 1200$
$(v \circ k)(8) = v[k(8)] = 50600(8) - 1200$
$(v \circ k)(8) = v[k(8)] = 404800 - 1200$
$(v \circ k)(8) = v[k(8)] = 403600$

La venta por las 8 hectáreas sembradas es $403,600.

c) *El costo* (c) *en pesos por kilogramo* (k) *que invierte el agricultor está dada por la función* $c(k) = 1.5k + 16000$ *pesos. Determina la función para obtener la ganancia por kilos, por hectáreas sembradas y ¿Qué ganancia tiene el agricultor por las 8 hectáreas sembradas?*

Determina la **función ganancia** $g(k)$ por kilos, sabes que ganancia es igual a venta menos costo, para determinar la función **realiza una resta de funciones**:

$$g(k) = v(k) - c(k)$$

$v(k) = 5.5k + 7600$
$c(k) = 1.5k + 16000$

Sustituye la función $v(k)\ y\ c(k)$

$$g(k) = v(k) - c(k)$$

$$g(k) = 5.5k + 7600 - (1.5k + 16000) = 5.5k + 7600 - 1.5k - 16000 = 4k - 8400$$

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{k}) = \mathbf{4}\boldsymbol{k} - \mathbf{8400}$ función para obtener la ganancia de acuerdo con los kilos vendidos.

Para las 8 hectáreas sembradas obtuvo 72,000 kilogramos, calcula la ganancia

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{k}) = \mathbf{4}\boldsymbol{k} - \mathbf{8400}$$
$$g(72000) = 4(72000) - 8400$$
$$g(72000) = 288000 - 8400$$
$$g(72000) = 279600$$

En 72,200 kilogramos obtuvo una ganancia de $279,600.

Ahora determina la **función ganancia** en términos de las hectáreas sembradas, para esto debes calcular la $(g \circ k)(h)$ de las funciones $g(k) = 4k - 8400$ y $k(h) = 9200h - 1600$

$(g \circ k)(h) = g[k(h)] = g(9200h - 1600) = 4(9200h - 1600) - 8400$

$= 36800h - 6400 - 8400 = 36800h - 14800$

$(\boldsymbol{g \circ k})(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h})] = \mathbf{36800}\boldsymbol{h} - \mathbf{14800}$ función ganancia de acuerdo con las hectáreas sembradas.

Calcula la ganancia que obtuvo en las 8 hectáreas sembradas, evalúa $h = 8$ en

$$(\boldsymbol{g \circ k})(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{h})] = \mathbf{36800}\boldsymbol{h} - \mathbf{14800}$$
$$(g \circ k)(8) = g[k(8)] = 36800(8) - 14800$$

$$(g \circ k)(8) = g[k(8)] = 294400 - 14800$$
$$(g \circ k)(8) = g[k(8)] = 294400 - 14800$$
$$(g \circ k)(8) = g[k(8)] = 279600$$

La ganancia que obtuvo en las 8 hectáreas sembradas es de $279,600.

Observa que en el planteamiento de la situación se presenta varias funciones:

La función kilogramos $k(h) = 9200h - 160$, con ella determinas **los kilogramos de maíz** que produce en h hectáreas sembradas.

La función venta $v(k) = 5.5k + 7600$ te sirve para **obtener la venta** en pesos por los k kilogramos de maíz producidos por hectárea.

La función costo $c(k) = 1.5k + 16000$ te sirve para **calcular el costo** por k kilogramos de maíz producidos por hectárea.

Después obtuviste la función venta $(v \circ k)(h) = v[k(h)] = 50600h - 1200$, con esta puedes calcular **la venta en pesos** por las h hectáreas sembradas.

Determinaste la función ganancia $g(k) = 4k - 8400$, con ella **obtienes la ganancia** en pesos de acuerdo con los k kilogramos producidos.

Luego calculaste la función ganancia $(g \circ k)(h) = g[k(h)] = 36800h - 14800$ para **calcular la ganancia** por h hectáreas sembradas.

Para 5 hectáreas ¿cuántos kilogramos produce?

$$k(5) = 9200(5) - 1600 = 44400$$

Por las **5 hectáreas** produce **44,400 kilogramos** de maíz.

Determina la venta. En las dos funciones para la venta debes obtener el mismo resultado. venta por kilogramos $\boldsymbol{v(k) = 5.5k + 7600}$ $v(44400) =$ Por los 44,400 kg una venta de __________ Venta por hectárea $\boldsymbol{(v \circ k)(h) = v[k(h)] = 50600h - 1200}$ $(v \circ k)(5) = v[k(5)] =$ Por las 5 hectáreas una venta de __________	Calcula la ganancia. En las dos funciones de ganancia debes obtener el mismo resultado. Ganancia por kilogramos $\boldsymbol{g(k)} = v(k) - c(k) = \boldsymbol{4k - 8400}$ $g(44400) =$ Por los 44,400 kg una ganancia de _______ Ganancia por hectáreas $(g \circ k)(h) = g[k(h)] = 36800h - 14800$ $(g \circ k)(5) = g[k(5)] =$ Por las 5 hectáreas una ganancia de _______

Ejercicios Adicionales

Contesta lo que se te plantea en cada uno de los siguientes puntos, de acuerdo a la situación que se te plantea.

1. Un agricultor siembra maíz por sistema de irrigación (riego por goteo). La producción en kg (k) por hectárea (h) está dada por la función $k(h) = 8900h - 1400$; la venta (v) en pesos por kilogramo (k) la obtiene mediante la función $v(k) = 4.5k + 2200$ y el costo por kilogramos (k) cosechados está dado por la función $c(k) = 4k - 3500$.

a) ¿Cuántos kilogramos cosecho en 6 hectáreas sembradas? Evalúa $h = 6$ en $k(h) = 8900h - 1400$

b) Determina la función para la venta por hectárea sembrada, para ello, realiza la operación función composición: $(v \circ k)(h) = v[k(h)] =$

c) ¿Cuánto fue la venta por 6 hectáreas sembradas?. Evalúa $h = 6$ en $(v \circ k)(h) = v[k(h)]$

d) Determina la función ganancia por kilogramos vendidos, debes de hacer una resta de funciones, $g(k) = v(k) - c(k) =$

e) Determina la función para la ganancia por hectárea sembrada, para ello realiza la operación función composición: $(g \circ k)(h) = g[k(h)] =$

f) ¿Cuánto fue la ganancia por 6 hectáreas sembradas? Evalúa $h = 6$ en $(g \circ k)(h) = g[k(h)] =$

Bloque 2 | Límites de una función

2.1 Propiedades

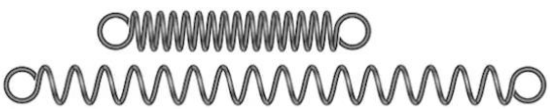
Introducción

La interpretación del concepto del límite es importante, porque muchas situaciones de nuestro contexto tienen límites, si no son considerados, nos llegan a poner en aprietos, algunos ejemplos de estas situaciones son las siguientes:

Límite de velocidad en las carreteras.

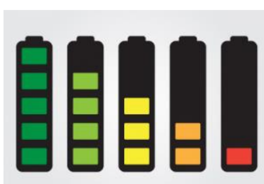
Límite de carga en vehículos automotores.

Límite elástico en física.



Límite de capacidad volumétrica en las presas

Límite de carga de una batería.



Límite volumétrico o capacidad al derrame en recipientes.

Capacidad de almacenamiento de información en un disco.

Límite de temperatura corporal, que en el caso del COVID 19 es importante para determinar si una persona está infectada o no.

Figura 2.1. Ejemplos de límites en la vida cotidiana

Actividades de Apertura

Un ejemplo del concepto de límite se puede determinar a partir de las proporciones que se indican de la sección aurea de la película de **“Donald en el país de las Matemágicas”,** Observa el video en el siguiente enlace:

https://www.youtube.com/watch?v=zegO2qlaKIo

Analiza el siguiente problema hipotético que nos genera un límite de una sucesión numérica: Demuestra que al término de un año habrá 12^2 células, partiendo de una célula, si estas tardan un mes en madura y un mes después se separan en dos.

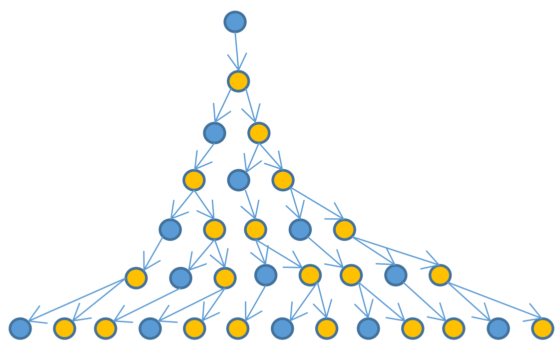


Figura 2.1.1. Proceso de reproducción celular.

En la figura 2.1.1. se muestra el proceso hasta los 7 meses. En la siguiente tabla registra el proceso hasta los 12 meses.

Mes	Conteo
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	
9	
10	
11	
12	

¿Cuál será el límite de esta sucesión sí no la limitamos a los doce primeros números?

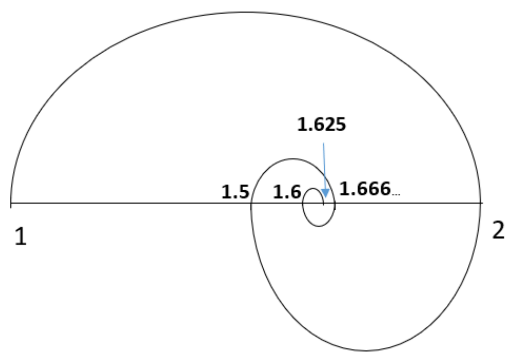
____

La serie numérica que registraste en la tabla se conoce como la serie de **Fibonacci**.

Analiza otro ejemplo: Si dividimos el segundo número obtenido entre el primero, el tercero entre el segundo, el cuarto entre el tercero y así sucesivamente, ¿Qué límite se tendrá?

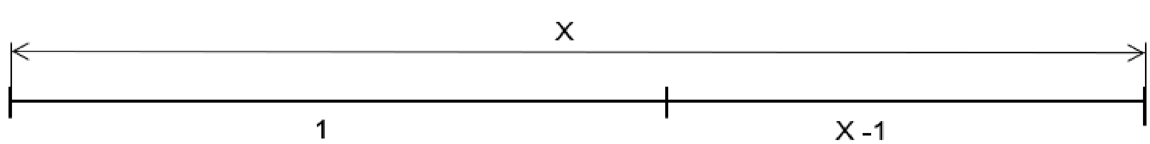
División	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	1.5
5/3	1.66666
8/5	1.6
13/8	1.625
21/13	1.61538
34/21	1.61904
55/34	1.61764
89/55	1.61818
144/89	1.61797

¿Habrá algún límite?
Si graficamos esta serie numérica podemos tener una idea.



Esto nos recuerda la película de "**Donald en el país de las matemágicas**"

El límite se puede determinar a partir de las proporciones que se indican de la sección aurea descritas en ella.



$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

La razón del segmento total a la unidad es igual a la razón entre ésta última y el segmento de longitud x-1

Resolviendo esta expresión nos queda:

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$$

$$x(x-1)=1(1)$$

$$x^2-x=1$$

$$x^2-x-1=0$$

Aplicando la fórmula general para la solución de ecuaciones de segundo grado:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sustituyendo nos queda:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Las dos respuestas obtenidas son:

$$x_1=1.6180339887498948482045868343656$$

$$x_2=-0.6180339887498948482045868343656$$

La respuesta real que corresponde a la razón es:

$$x_1=1.6180339887498948482045868343656$$

Actividades de Desarrollo

Sucesiones de números

Como observaste, para llegar a este concepto debemos situarlo sobre una escala numérica los puntos correspondientes a los términos de la sucesión, te invitamos a que hagas la gráfica de la siguiente serie de números y determines lo que se te pide.

$$1,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{9}{5},\dots,2-\frac{1}{n},\dots$$

Si hacemos una tabulación dándole valores a ***n*** podremos ver con mayor facilidad la aproximación al límite de esta sucesión.

n	$2-\frac{1}{n}$
1	1
2	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{5}{3}$
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

El cálculo para:

n = 1 queda: $2-\frac{1}{1}=1$

n = 2 queda: $2-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

n = 3 queda: $2-\frac{1}{3}=\frac{6}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

De la tabla indicada con números, nos resulta por límite el valor de 2. Supongamos que x es una variable cuyo campo de variación es la sucesión $2-\frac{1}{n}$

$$x = 2 - \frac{1}{n}$$

Se dice que x se aproxima al límite 2, o bien que x tiende a 2, y se representa $x \to 2$.

La sucesión $2-\frac{1}{n}$ no contiene a su límite 2, sin embargo, la sucesión $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{6}, 1, \ldots$, en la que todos los términos impares son iguales a 1. Por tanto, una sucesión puede o no contener a su propio límite. Sin embargo, como veremos más adelante, decir que $x \to a$ implica, $x \neq a$ esto es, *se sobrentenderá que cualquier sucesión dada no contiene a su límite como término*.

Si $x \to 2$ según la sucesión $2-\frac{1}{n}$, $f(x)=x^2 \to 4$ según la sucesión $1, \frac{9}{4}, \frac{25}{9}, \frac{49}{16}, \ldots, \left(2-\frac{1}{n}\right)^2$

Ahora bien, si $x \to 2$ según la sucesión $2.1, 2.01, 2.001, \ldots, 2+\frac{1}{n^n}$; $x^2 \longrightarrow 4$; según la sucesión $4.41, 4.0401, 4.004001, \ldots, \left(2+\frac{1}{10^n}\right)^2$, ... Parece razonable esperar que x^2 tiende a 4 siempre que tienda a 2. En estas condiciones se establece que "*el límite de x*^{2} *cuando x tiende a 2 es igual a 4*", y se representa por el simbolismo

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4 .$$

Cálculo de límites por aproximación.

Límites por la derecha y por la izquierda.

Cuando $x \to 2$ según la sucesión $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots, 2 - \frac{1}{n}, \dots$, cada término es siempre menor que 2. Se expresa diciendo que x *tiende a 2 por la izquierda,* y se representa por $x \to 2^-$. Análogamente, cuando $x \to 2$ según la sucesión $2.1, 2.01, 2.001, \dots, 2 + \frac{1}{n^n}$ cada término es siempre mayor que 2. Se expresa diciendo que x *tiende a 2 por la derecha* y se representa por $x \to 2^+$. Es evidente que la existencia del $\lim_{x \to a} f(x)$ implica la del *límite por la izquierda* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y la del *límite por la derecha* $\lim_{x \to a^+} f(x)$, y que por ambos son iguales. Sin embargo, la existencia del límite por la izquierda (derecha).

Ejemplo: Sea la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. El dominio de definición es el intervalo $-3 \leq x \leq 3$. Si a es un número cualquiera del intervalo abierto $-\ 3 < x < 3$, $\lim_{x \to a} \sqrt{9 - x^2}$ existe y es igual a $\sqrt{9 - a^2}$. Considérese ahora que $a = 3$. Si x tiende a **3** por la izquierda, $\lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$, y si **"*x*"** tiende a **3** por la derecha $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$, no existe, puesto que para $x > 3$, $\sqrt{9 - x^2}$ es un número imaginario. Por tanto, no existe $\lim_{x \to 3} \sqrt{9 - x^2}$.

Análogamente, $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$ existe y es igual a 0; sin embargo,

no existen $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$ y ni $\lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$.

Veamos de una manera más sencilla este tema mediante algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Hagamos el análisis del siguiente límite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ con precisión de una milésima.

Solución: Sí hacemos la sustitución directa del límite nos quedará:

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(2)^2+2-6}{2-2} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$ indeterminado

Ahora hagámoslo con lo que nos mencionan en el párrafo anterior:

Analizando por la izquierda el límite con precisión de una milésima, es decir, nos aproximamos a una milésima por la izquierda del **2**, lo cual quiere decir que hacemos una diferencia de dos con una milésima para ver a que valor tenderá el límite, siendo este de la siguiente forma:

$2 - 0.001 = 1.999$ el límite queda:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+x-6}{x-2} \approx \lim_{x \to 1.999} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(1.999)^2+1.999-6}{1.999-2}$$

$$= \frac{2.996001+1.999-6}{1.999-2} = \frac{-0.004999}{-0.001} = 4.999$$

Analizando por la derecha el límite con precisión de una milésima, es decir, nos aproximamos a una milésima por la derecha del **2**, lo cual quiere decir que hacemos una suma de dos con una milésima para ver a qué valor se aproximará el límite, siendo este de la siguiente forma:

$2 + 0.001 = 2.001$ el límite queda:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} \approx \lim_{x \to 2.001} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(2.001)^2+2.001-6}{2.001-2}$$

$$= \frac{4.004001+2.001-6}{2.001-2} = \frac{0.005001}{0.001} = 5.001$$

Como podemos ver los dos límites se aproximan a ***5*** si redondeamos los dos resultados.

Ejemplo 2. Analicemos el límite de $f(x) = \frac{4-\sqrt{25-x^2}}{x-3}$ cuando $x \to 3$.

Hagámoslo sustituyendo directamente la tendencia y veamos que pasa:

$$\lim_{x \to 3} \frac{4-\sqrt{25-x^2}}{x-3} = \frac{4-\sqrt{25-(3)^2}}{3-3} = \frac{4-\sqrt{25-9}}{3-3}$$

$$= \frac{4-\sqrt{16}}{0} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0} \text{ indefinido o indeterminado}$$

Nuevamente hagámoslo con lo que hemos aprendido en el párrafo anterior:

Analizando por la izquierda el límite con precisión de una milésima, es decir, nos aproximamos a una milésima por la izquierda del **3**, lo cual quiere decir que haremos una diferencia de **3** con **0.001** para ver a qué valor tenderá el límite, siendo este de la siguiente forma:

$3 - 0.001 = 2.999$ el límite queda:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{4-\sqrt{25-x^2}}{x-3} \approx \lim_{x\to 2.999}\frac{4-\sqrt{25-x^2}}{x-3} = \frac{4-\sqrt{25-(2.999)^2}}{2.999-3}$$

$$= \frac{4-\sqrt{25-8.994001}}{-0.001} = \frac{4-\sqrt{16.00599}}{-0.001} = \frac{4-4.0007498}{-0.001}$$

$$= \frac{-0.0007498}{-0.001} = 0.7498$$

Analizando por la derecha el límite con precisión de una milésima, es decir, nos aproximamos a una milésima por la derecha del **3**, lo cual quiere decir que hacemos una suma de **3** con **0.001** para ver a qué valor tenderá el límite, siendo este de la siguiente forma:

$3 + 0.001 = 3.001$ el límite queda:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{4-\sqrt{25-x^2}}{x-3} \approx \lim_{x\to 3.001}\frac{4-\sqrt{25-x^2}}{x-3} = \frac{4-\sqrt{25-(3.001)^2}}{3.001-3} = \frac{4-\sqrt{25-9.006001}}{0.001}$$

$$= \frac{4-\sqrt{15.993999}}{0.001} = \frac{4-3.9992498}{0.001} = \frac{0.0007501954}{0.001} = 0.7501754$$

Redondeando a centésimas es **0.75**

Como podemos ver los dos límites se aproximan a ***0.75*** si redondeamos los dos resultados, esto lo comprobarás con los métodos que se utilizan para limites indeterminados que veremos más adelante, mientras eso sucede hagamos otro ejercicio un poco más difícil, pero con éste método que estamos viendo todo se hace fácil.

Actividades de cierre

1. Aplica el procedimiento explicado anteriormente para resolver el límite:

$$\lim_{n\to 8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-64}\right)$$

a) Sustituye directamente la tendencia observa que sucede:

$$\lim_{n\to 8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-64}\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=$$

b) **Analiza por la izquierda el límite** con precisión de una milésima, es decir, nos aproximamos a una milésima por la izquierda del 8. Sustituye el valor de 7.999

$$\lim_{n\to 8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-64}\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=$$

c) **Analiza por la derecha el límite** con precisión de una milésima, es decir, nos aproximamos a una milésima por la izquierda del 8. Sustituye el valor de 8.001

$$\lim_{n\to 8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-64}\right)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=$$

d) ¿Existe una misma tendencia en los valores por ambos lados?

e) En caso afirmativo, ¿Cuál es el límite de la expresión planteada?

2. Resuelve los siguientes limites aplicando el procedimiento anterior:

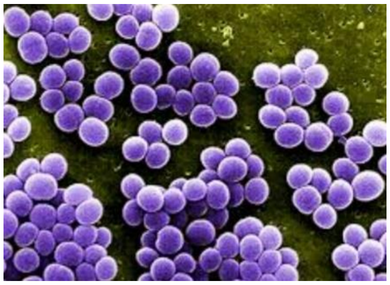
a) $\lim_{y\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{y}-1}{y-1}\right)$

b) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x-4}{x^2-16}\right)$

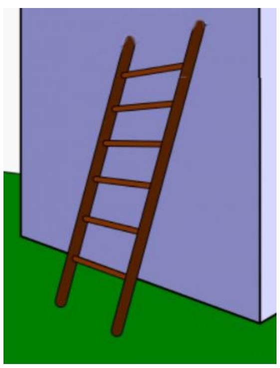
c) $\lim_{p\to 0}\left(\frac{p^2-p}{p}\right)$

Actividades de contexto o Transversales

1. La bacteria que nos produce la enfermedad comúnmente llamada *FARINGITIS,* el *Staphylococus aureus*, tiene un comportamiento similar al *COVID-19,* sólo que el *Staphylococus aureus* se duplica cada 3 horas, siguiendo la misma pauta del desarrollo de los números de Fibonacci, haz un diagrama de árbol, determina la sucesión de números, determina la ley matemática con la cual se reproducen y determina el límite de la sucesión.



2. Una escalera de 30 pies se apoya en un edifico y su base se separa del edificio a 3 pies por segundo. Sabiendo que su extremo superior desciende por la pared con velocidad



$$r = \frac{2x}{\sqrt{620-x^2}}\ {}^{pies}\!/_{s}\,.$$

a) Hallar la velocidad cuando x es $7\ pies$.
b) Hallar la velocidad cuando $x = 15\ pies$.
c) Hallar el límite de r cuando $x \to 25$.

1. El coste (en millones de dólares) para un gobierno de la captura del x por ciento de una droga ilegal al entrar en el país viene dado por:

$$c = \frac{520x}{100 - x}, \qquad 0 \le x \le 100$$

a) Hallar el coste de capturar el 20 por ciento.
b) Hallar el coste de capturar el 40 por ciento.
c) Hallar el coste de capturar el 60 por ciento.
d) Hallar el coste de capturar el 80 por ciento.
e) Hallar el límite de C cuando $x \to 100^{-}$

Ejercicios Adicionales

Límite de una sucesión.

Límite de una sucesión.

1. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, utilizando la metodología antes estudiada:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

c) $2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \ldots$

d) $5, 4, \frac{11}{3}, \frac{7}{2}, \frac{17}{5}, \ldots$

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

f) $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, \ldots$

2. Resuelve los siguientes limites aplicando el procedimiento estudiado anteriormente:

a. $\lim\limits_{r\to 1}\left(\frac{1-r}{1-r^2}\right)$

b. $\lim\limits_{t\to 4}\left(\frac{t^2-9}{t-3}\right)$

c. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{h^2-3h}{h}\right)$

3. Determina los valores que se indican en la tabla desde *n* = 4 hasta *n* = 20 en el siguiente espacio:

n	$2-\frac{1}{n}$
1	1
2	$\frac{3}{2}=1.5$
3	$\frac{5}{3}=1.6$
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Si anotas sus equivalencias en decimales ocupando una calculadora, ¿Cuál es el límite de esta sucesión?

4. Determina **directamente** los límites de las siguientes sucesiones de números, indicadas en la tabla (n aumenta):

Sucesión	**Límite**
$3-\frac{1}{n}$	
$5-\frac{1}{n}$	
$-6-\frac{1}{n}$	
$6+\frac{1}{n}$	
$-4+\frac{1}{n}$	

5. Determina el límite de las siguientes sucesiones en términos de n:

Ejemplo: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}}$

a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ $\boxed{}$

b) $2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \ldots$ $\boxed{}$

c) $5, 4, \frac{11}{3}, \frac{7}{2}, \frac{17}{5}, \ldots$ $\boxed{}$

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ $\boxed{}$

e) $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, \ldots,$ $\boxed{}$

2.1.1 Límites indeterminados

Introducción

Como vimos en la sección anterior existen límites de sustitución directa, los cuales se resuelven al evaluar la función en un punto específico. En esta sección analizaremos los límites indeterminados, este tipo de límites se caracteriza porque al evaluar la función nos queda un resultado de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{a}{0}$ con $a \in R$, que se conocen como indeterminaciones.

Este tipo de límites surge en funciones racionales, recordar que este tipo de funciones tiene la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones, que generalmente son polinomios y $Q(x)$ es diferente de cero. Cuando se obtiene el límite de una función racional, puede dar como resultado alguno de los siguientes casos:

a) El resultado de un número real.

b) El resultado es un cociente de la forma $\frac{0}{0}$ (tanto numerador como denominador son cero).

c) El resultado es un cociente de la forma $\frac{a}{0}$ (donde el denominador es cero y a es cualquier número real).

Actividades de Apertura

El concepto de límite de una función se aplica a diferentes materias, como por ejemplo: contabilidad, economía, física, química, biología y medicina. Para comenzar a abordar los ejemplos de este tema partiremos de un problema relacionado con medicina. Tal vez, te has dado cuenta que, al ingerir un medicamento, la concentración de dicho medicamento dura dentro del cuerpo (en la sangre) cierto tiempo y después es desechado. En este proceso la concentración alcanza su acción efectiva en un determinado instante, luego a partir de ahí, este efecto dura cierto lapso y finalmente disminuye y es expulsado, por lo que es necesario ingerir otra dosis. Dicho esto, tenemos que:

Si la concentración de un medicamento en la sangre con respecto al tiempo t, está dada por la función $f(t) = \frac{t-1}{t^2-1}$, t es medido en horas y $f(t)$ en miligramos por litro (mg/l). Contesta las siguientes preguntas:

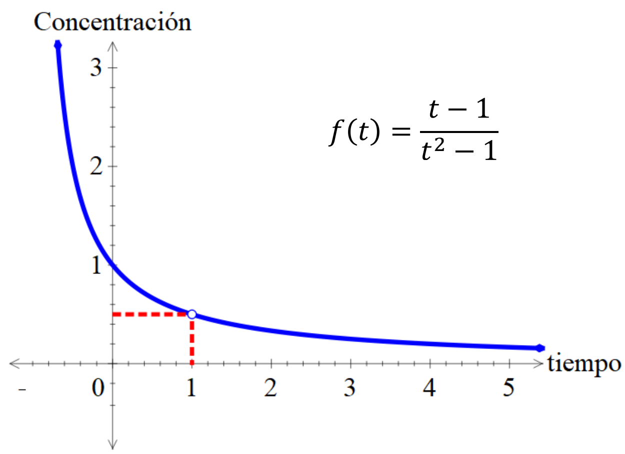
a) ¿Cuál será la concentración en 240 minutos?

b) ¿Cuál será la concentración en 8 horas?

c) ¿Cuál será la concentración en una hora?

Solución:

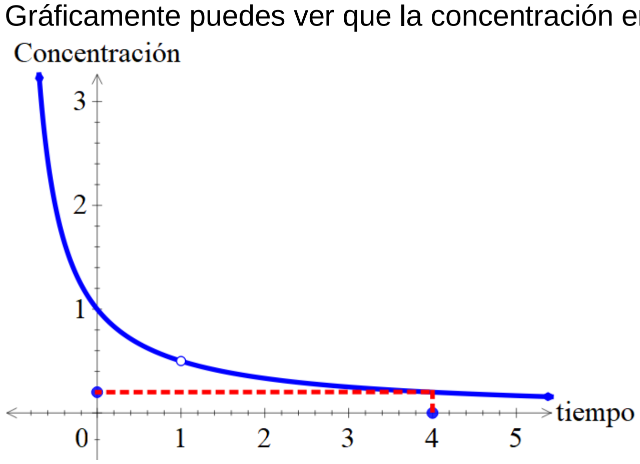
Para darte una idea del comportamiento de la concentración en la sangre conforme avanza el tiempo puedes visualizarlo en la siguiente gráfica, en la cual se observa que para un tiempo inicial cero, la concentración es la unidad completa y conforme va transcurriendo el tiempo ésta disminuye:



a) Para este inciso recuerda antes que nada la conversión de unidades, pues en la función la variable del tiempo debe medirse en horas. Por lo que debes convertir 240 minutos a horas.

$$\left(\frac{1\ hora}{60\ min}\right)(240\ min) = 4\ horas$$

Gráficamente puedes ver que la concentración en cuatro horas corresponde a $0.2\ mg/l$.



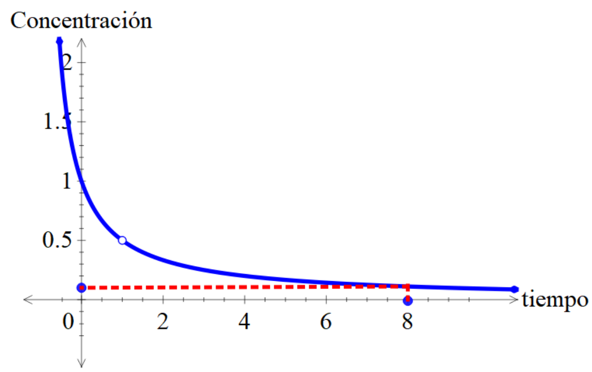
Ahora bien, si quieres obtener este valor de forma analítica necesitamos realizar lo siguiente:

$$\lim_{t\to 4}\frac{t-1}{t^2-1}=\frac{4-1}{4^2-1}=\frac{3}{4^2-1}=\frac{3}{16-1}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0.2\,\boldsymbol{mg/l}$$

Este resultado como puedes ver se obtiene mediante lo que vimos en el tema anterior, es decir, el límite de sustitución directa.

a) Ahora veamos cuál es la concentración en ocho horas, para esto tenemos que:

En la gráfica puedes observar que la concentración en 8 horas corresponde a $0.1\,mg/l$. Es una aproximación; porque para saber el valor exacto es necesario realizar los cálculos analíticos.



De este modo, observa que por límites de sustitución directa obtenemos:

$$\lim_{t\to 8}\frac{t-1}{t^2-1}=\frac{8-1}{8^2-1}=\frac{7}{8^2-1}=\frac{7}{64-1}=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}=0.1111\,\boldsymbol{mg/l}$$

Regresando al problema puedes pensar que la concentración ya está casi fuera del cuerpo por lo que será necesario otra dosis para que el medicamento vuelva a tener efecto.

b) La pregunta clave para introducir este tema es ¿cuál será la concentración en una hora?

Si lo resuelves de forma analítica utilizando la sustitución directa obtienes:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^2-1}=\frac{\lim_{t\to 1} t-1}{\lim_{t\to 1} t^2-1}=\frac{1-1}{1^2-1}=\frac{0}{1^2-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\Bigg\}$$ Esto es una **indeterminación.**

Nota: *Existen diferentes indeterminaciones que podemos obtener al utilizar límites, por ejemplo:* $\frac{0}{0},\frac{a}{0},\frac{\infty}{\infty},(\infty*0),(\infty\pm\infty),1^{\infty},0^{\infty},\infty^{0}$. *En esta unidad nos enfocaremos en analizar aquellos que tienen la forma* $\frac{0}{0}$.

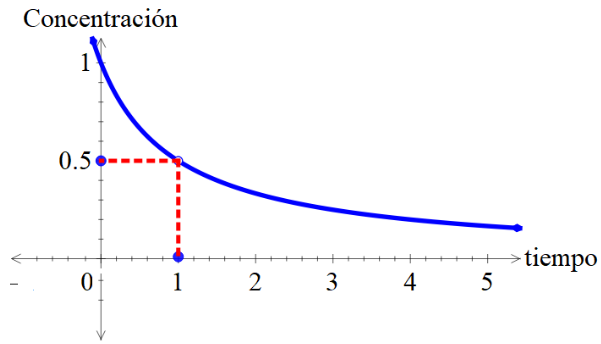
Algunas veces estas indeterminaciones pueden resolverse aplicando procedimientos algebraicos como la factorización, la racionalización, etc.

En éste caso, si realizas una factorización en el denominador y simplificas se resuelve la indeterminación; por factorización de diferencia de cuadrados obtienes:

$$\lim_{t \to 1} \frac{t-1}{t^2-1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t-1)}{(t-1)(t+1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{1}{(t+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$= 0.5\, mg/l$$



Analizando la gráfica observa que el límite corresponde efectivamente a $0.5\, mg/l$.

Por lo que puedes concluir que la concentración del medicamento en una hora es $0.5\, mg/l$.

Actividades de Desarrollo

Para empezar a desarrollar una habilidad en la resolución de límites que presentan alguna indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ comencemos primero recordando con un ejemplo los casos de factorización:

Factor Común: para el primer ejemplo se trata de factorizar al mayor factor que tengan en común tanto en coeficiente como en exponente todos los términos. Y para el segundo se busca hacer lo mismo, pero primero se hace una agrupación de términos.

Ejemplo 1: $45x^2 + 20x^6 - 25x^4 = 5x^2(9 + 4x^4 - 5x^2)$

Ejemplo 2: $y^3 + y^2 + y + 1 = y^2(y+1) + 1(y+1) = (y^2+1)(y+1)$

Diferencia de Cuadrados: Este caso de factorización se utiliza para expresiones de la forma $a^2 - b^2$ y sus factores se determinan a partir de sacar la raíz a ambos términos y dichas raíces se escriben dos veces: una donde se estén sumando y la otra restando, esto es: $(a+b)(a-b)$.

Ejemplo 1. $x^2 - 36 = (x+6)(x-6)$

Ejemplo 2. $m^4 - 81 = (m^2 + 9)(m^2 - 9) = (m^2 + 9)(m - 3)(m + 3)$

De la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$**:** Para este caso de factorización se recomienda buscar dos números que multiplicados nos den el valor de ***c*** y sumados nos den el valor de **b**.

Ejemplo 1. $x^2 - x - 30 = (x + 5)(x - 6)$

Ejemplo 2. $b^2 - 8b + 7 = (b - 7)(b + 1)$

De la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$**:** Para este caso de factorización se recomienda buscar dos números los cuales multiplicados nos den el valor de ***a*c*** y sumados nos resulte el valor de **b** y con estos números se realiza una descomposición del número b y se realiza factor común de términos semejantes.

Ejemplo 1: $6x^2 + 23x + 7 = (3x + 1)(2x + 7)$

Se buscan los números tales que cumplan las condiciones mencionadas:

(21)*(2)=(6*7)=42   (21)+(2)=23

$$6x^2 + 23x + 7 = 6x^2 + 21x + 2x + 7 = (\,6x^2 + 21x) + (2x + 7)$$
$$= 3x(2x + 7) + 1(2x + 7) = (3x + 1)(2x + 7)$$

Suma o diferencia de cubos perfectos. Se tienen dos casos:

Primer caso: La suma de dos raíces cúbicas: $a^3 + b^3$

Para obtener el primer factor:

$(a^3 + b^3)$ se extrae raíz cúbica a ambos términos y se suman: $(a + b)$

Entonces,

$$(\underset{\text{Primer término}}{a} + \underset{\text{Segundo término}}{b})$$

Para obtener el segundo factor:

Se eleva al cuadrado el primer término: a^2

Menos la multiplicación del primer término por el segundo: $-ab$

Más el cuadrado del segundo término: $+b^2$

Entonces, reuniendo los dos factores obtienes: $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Segundo caso: La diferencia de dos raíces cubicas: $a^3 - b^3$

Para obtener el primer factor:

$(a^3 - b^3)$ se extrae raíz cúbica a ambos términos y se restan: $(a - b)$

Entonces,

Para obtener el segundo factor:
Se eleva al cuadrado el primer término: a^2
Más la multiplicación del primer término por el segundo: $+ab$
Más el cuadrado del segundo término: $+b^2$

Entonces, reuniendo los dos factores obtienes: $(a^3 - b^3) = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Ejemplo 1**:** Descomponer en dos factores: $x^3 - 125$

Se extrae raíz cúbica a cada uno de los términos:

De $(x^3 - 125)$ se obtiene el primer factor: $(x - 5)$

Para el segundo factor:

El cuadrado del primer término: x^2

Más la multiplicación de los dos términos: $+5x$

Más el cuadrado del segundo término: $+25$

De esta manera obtienes los dos factores: $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

Ejemplo 2: Comprueba que se cumpla el resultado de la siguiente expresión: $(1 - 8x^3) = (1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)$

A continuación, se presentan varios ejemplos que dan como resultado una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, en los cuales se busca utilizar algún caso de factorización para resolverlo y posteriormente analizar una comprobación a partir de su gráfica.

Ejemplo 1: Calcula el límite de la función: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

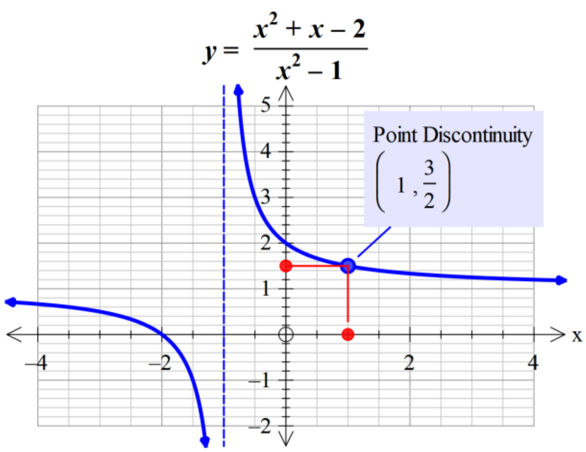
Solución: Si calculas el límite por sustitución directa tienes:

$$\left.\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + x - 2)}{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1)} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \right\} \text{Lo cual es una indeterminación.}$$

Para resolver esta indeterminación realiza las factorizaciones correspondientes:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x^2+x-2}^{factorizamos\ por\ caso\ x^2+bx+c}}{\underbrace{x^2-1}_{factorizamos\ por\ dif.de\ cuadrados}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\frac{(1+2)}{(1+1)}=\frac{3}{2}=1.5$$

Ahora bien, si observas la gráfica de la función puedes corroborar este resultado, pues cuando $x \to 1$ su límite es 1.5



x	y
−4	0.666667
−3	0.5
−2	0
−1	Undefined
0	2
1	Undefined
2	1.333333
3	1.25
4	1.2
5	1.166667

Ejemplo 2: Calcula el límite de la función: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-6x-20}{3x^2+6x+6x+12}$

Solución**:** Si calculas el límite por sustitución directa obtienes:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-6x-20}{6x^2+12x+7x+14}=\frac{\lim\limits_{x\to -2} 2x^2-6x-20}{\lim\limits_{x\to -2} 6x^2+12x+7x+14}=$$

$$=\frac{2(-2)^2-6(-2)-20}{6(-2)^2+12(-2)+7(-2)+14}=\frac{8+12-20}{24-24-14+14}=\frac{0}{0}$$

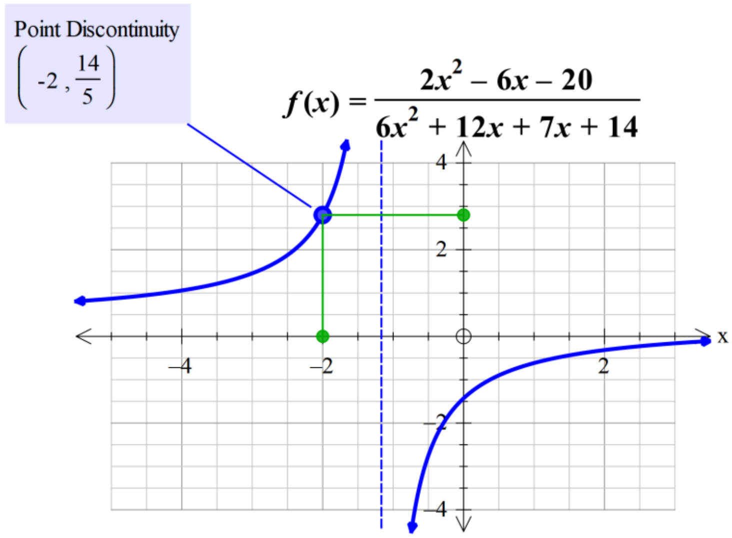
Se tiene una indeterminación. Para resolverla realiza las factorizaciones correspondientes:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\overbrace{2x^2-6x-20}^{factorizamos\ por\ caso\ ax^2+bx+c}}{\underbrace{6x^2+12x+7x+14}_{factorizamos\ por\ factor\ común}}=\lim_{x\to -2}\frac{(2x+4)(x-5)}{6x(x+2)+7(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{\overbrace{(2x+4)}^{sacamos\ 2\ como\ factor\ común}\quad(x-5)}{(6x+7)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2\cancel{(x+2)}(x-5)}{(6x+7)\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x-5)}{(6x+7)}=\frac{\lim\limits_{x\to -2} 2(x-5)}{\lim\limits_{x\to -2}(6x+7)}=$$

$$=\frac{2(-2-5)}{(6(-2)+7)}=\frac{2(-7)}{-12+7}=\frac{-14}{-5}=\frac{14}{5}=\boxed{2.8}$$

Ahora bien, si observas la gráfica de la función puedes corroborar este resultado, pues cuando $x \to -2$ su límite es 2.8



x	y
−4	1.058824
−3	1.454545
−2	Undefined
−1	−12
0	−1.428571
1	−0.615385
2	−0.315789
3	−0.16
4	−0.064516
5	0

Ejemplo 3: Calcula el límite de la función: $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}}$ cuando $\boldsymbol{x \to 2}$

Solución: Si calculas el límite por sustitución directa obtienes:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-2} = \left.\frac{0}{0}\right\} \quad \text{Una indeterminación}$$

Para resolver esta indeterminación, utiliza otra técnica que es racionalizar la función, es decir, multiplica por una función identidad de tal forma que al hacerlo la función racional ya no tenga raíces y puedas regresar a factorizar y simplificar.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$$

Primeramente, obtén el conjugado de $\sqrt{x}-\sqrt{2}$, que es igual al mismo binomio con el signo central cambiado, es decir, $\sqrt{x}+\sqrt{2}$.

Enseguida, multiplica la función por su conjugado; tanto el numerador como el denominador.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right)$$

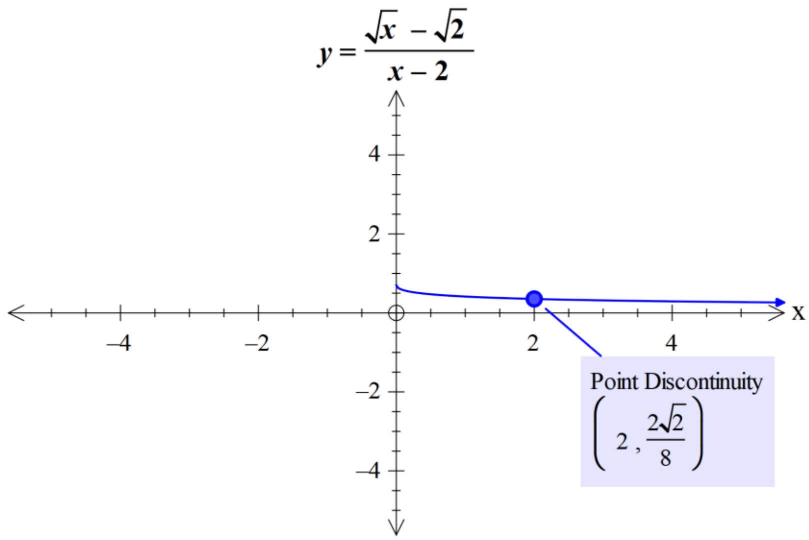
A continuación, multiplica numeradores y denominadores, y se obtiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=$$

Sustituimos el valor del límite y obtención del resultado:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Puedes comprobarlo mediante su gráfica:



x	y
0	0.707107
0.5	0.471405
1	0.414214
1.5	0.378937
2	Undefined
2.5	0.333851
3	0.317837
3.5	0.30441
4	0.292893
4.5	0.282843

Como puedes ver, el resultado del cálculo es $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, y el punto que nos muestra la gráfica es $\frac{2\sqrt{2}}{8}$ tienen el mismo valor de 0.353553.

Otra manera de ver la solución es realizar: $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{4(2)}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{8}}$

Ejemplo 4. Calcula el límite de la función: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

Si sustituyes el valor del límite en la función obtienes:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\frac{4-(2)^2}{3-\sqrt{(2)^2+5}}=\frac{4-4}{3-\sqrt{9}}=\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\quad \text{Indeterminación}$$

Para quitar la indeterminación obtén el conjugado de: $3-\sqrt{x^2+5}$, que es igual al mismo binomio con el signo central cambiado: $3+\sqrt{x^2+5}$.

Enseguida, multiplica la función por su conjugado tanto el numerador como el denominador.

$$\lim_{x\to2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to2}\frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\underbrace{\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}_{factorización\ por\ diferencia\ de\ cuadrados}}=\lim_{x\to2}\frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(9-\left(x^2+5\right)\right)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(9-x^2-5\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{\left(4-x^2\right)}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\cancel{\left(4-x^2\right)}}=\lim_{x\to2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)=$$

$$=\left(3+\sqrt{2^2+5}\right)=3+\sqrt{9}=3+3=\boxed{6}$$

Ejemplo 5: Calcula el límite de la función: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$

Solución: si calculas el límite por sustitución directa obtienes:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{(-1)^3+1}{(-1+1)}=\boxed{\frac{0}{0}}\ \text{Una indeterminación}$$

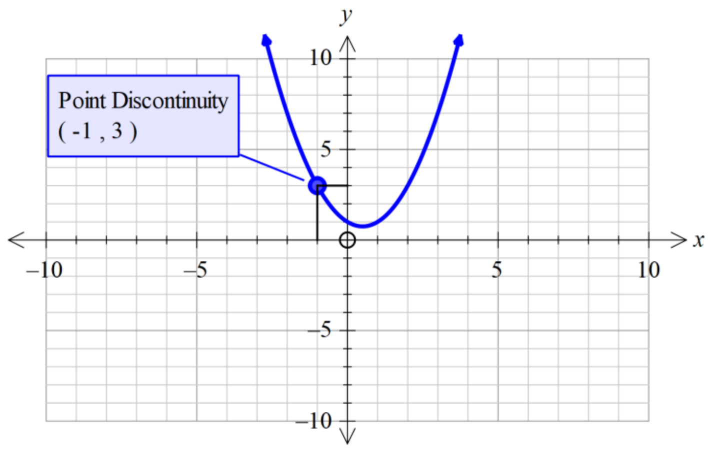
Para quitar la indeterminación factoriza el numerador:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\overset{factorización\ por\ \left(a^3+b^3\right)}{x^3+1}}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\overbrace{(x+1)\left(x^2-(x)(1)+(1)^2\right)}^{descomposición\ en\ dos\ factores}}{(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}\left(x^2-x+1\right)}{\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to-1}\left(x^2-x+1\right)=\left((-1)^2-(-1)+1\right)=1+1+1=\boxed{3}$$

Su gráfica:

$$y=\frac{x^3+1}{x+1}$$



x	y
−1.5	4.75
−1.45	4.5525
−1.4	4.36
−1.35	4.1725
−1.3	3.99
−1.25	3.8125
−1.2	3.64
−1.15	3.4725
−1.1	3.31
−1.05	3.1525
−1	Undefined
−0.95	2.8525
−0.9	2.71
−0.85	2.5725
−0.8	2.44
−0.75	2.3125
−0.7	2.19
−0.65	2.0725
−0.6	1.96
−0.55	1.8525

Ejemplo 6**:** Calcula $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$

Solución: sustituye el límite de la función de forma directa.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{3^3-27}{3^2-9}=\frac{27-27}{9-9}=\boxed{\frac{0}{0}}\ \Big\}\ \text{Indeterminación}$$

Para quitar la indeterminación factoriza el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\overbrace{(x-3)(x^2+3x+9)}^{\textit{Factorización por }(a^3-b^3)}}{\underbrace{(x-3)(x+3)}_{\textit{Factorización por diferencia de cuadrados}}}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3x+9)}{(x+3)}=\frac{3^2+3(3)+9}{3+3}=\frac{9+9+9}{6}=\frac{27}{6}=\boxed{\frac{9}{2}}$$

1. Ejercicio: Con base en los planteamientos estudiados en los ejemplos anteriores, determina el valor de los siguientes límites a partir de la función dada:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-3x+1}{x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3\sqrt{x}-3}{x^2-1}$

Actividades de cierre

Determina el valor de los siguientes límites a partir de la función dada:

a) $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x^2 - 81}{x - 9} =$

b) Calcular el límite de la función $\mathbf{y} = \frac{x^2 - 100}{x^2 + x - 110}$ cuando $x \to 10$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} =$ $\quad \lim\limits_{x \to 7} \frac{\sqrt{x-6} - 1}{x^2 - 49} =$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 7x + 10} =$

Actividades de contexto o Transversales

Uno de los problemas principales que nos encontramos en la actualidad es la caza indebida de

animales. Supongamos que la caza ilegal de un determinado animal en peligro de extinción está determinada por la función $\boldsymbol{f(t)} = \frac{t - 10}{-(t^2 - 5t - 50)} + 2.04$, donde t representa el tiempo en años y $f(t)$ la cantidad en miles de animales que son cazados. A partir de esto contesta lo que se te pide:

Nota: las respuestas se dan en enteros pues al hablar de animales no tiene sentido utilizar decimales.

1. ¿Cuál es el número de animales cazados en un año?

$$f(1) = \frac{1 - 10}{-\left((1)^2 - 5(1) - 50\right)} + 2.04 = \frac{-9}{54} + 2.04 = \frac{-1}{6} + 2.04 = \boxed{1.873333}$$

Como son miles, entonces tenemos 1873 animales cazados.

2. Si se tienen, supongamos, 2020 animales de la especie en peligro. En 20 años ¿Cuántos animales quedarían?

$$f(20)=\frac{20-10}{-\left((20)^2-5(20)-50\right)}+2.04=\frac{10}{-250}+2.04=\frac{1}{-25}+2.04=-0.04+2.04=\boxed{2}$$

Como son miles, entonces tenemos 2000 animales cazados y si teníamos 2020 animales en total nos quedarían solo 20 animales.

3. ¿Cuál es el número de animales cazados en 10 años?

La función en ese tiempo nos resulta una indeterminación por lo que es necesario utilizar el concepto de límite para determinar la cantidad de animales cazados:

$$f(10)=\frac{10-10}{-\left((10)^2-5(10)-50\right)}+2.04=\frac{0}{0}+2.04$$

$$\lim_{x\to 10}\frac{t-10}{-\left(\underbrace{t^2-5t-50}_{\text{Factorización del tipo } x^2+bx+c}\right)}+2.04=\lim_{x\to 10}\frac{\cancel{(t-10)}}{-\cancel{(t-10)}\,(t+5)}+2.04=\lim_{x\to 10}\frac{1}{-(t+5)}+2.04=$$

$$=-\frac{1}{15}+2.04=-0.066666+2.04=\boxed{1.97333}$$

Como son miles entonces tenemos 1973 animales cazados.

1. Resuelve el siguiente problema: Supongamos que la posición que tiene una partícula está dada por la función

$$s(t)=\frac{t-4}{t^2-16}+\frac{t^2-100}{t-10}$$

Donde s se mide en metros y t en segundos.

Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿En qué instantes de tiempo se tendrían indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$?

b) ¿Qué concepto necesitas aplicar para poder saber la posición de la partícula en esos instantes de tiempo?

c) Aplica el concepto anterior para determinar la posición en dichos instantes de tiempo.

d) ¿Cuál es el límite de la función posición cuando $t \to 8$ segundos?

e) ¿Cuál es el límite de la función posición cuando $t \to 4$ segundos?

Ejercicios Adicionales

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x-8x+24} =$

b) Calcula el límite de la función $y = \frac{\sqrt{x^2-15}-1}{x^2-2x-8}$ cuando $x \to 4$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2+6x-28}{2x^2+6x-20} =$

d) Calcula el límite de la función $y = \frac{27-x^3}{9-x^2}$ cuando $x \to 3$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} =$

2.1.2 Cálculo de límites infinitos

Introducción

Si el límite de una función es infinito, su valor aumenta o disminuye infinitamente cuando $x \to c$. Es decir:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

O si una función tiende hacia el límite 1, cuando la variable independiente x tiende al infinito, es decir:

$$\lim_{x \to c} f(x) = 1$$

Podemos deducir que existen ciertos límites que se presentan generalmente, cuando la variable independiente x tiene el valor de cero ó infinito:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x} = 0$ b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{c} = \infty$

Con base en lo anterior, podemos decir que:

- *Sí el máximo grado se presenta en el denominador el límite siempre será cero.*
- *Sí el máximo grado se presenta en el denominador el límite siempre será ∞.*
- *Sí tanto el denominador como el numerador tienen el mismo grado, se tendrá como respuesta los coeficientes de los términos mencionados.*

Esto implica que este tipo de límites se pueden resolver por simple inspección visual, sin embargo, habrá que aprender el procedimiento riguroso de los matemáticos, que es lo que sigue, y en esta situación se nos presenta:

Actividades de Apertura

Ejemplo 1: Obtén el límite de la función: $y = \frac{5x^4 - 3x + 8}{8 + 3x^2 + 6x^4}$ cuando x tiende a infinito (∞).

Si sustituimos directamente, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^3+8}{8+3x^2+6x^4}=\frac{5(\infty)^4-3(\infty)^3+8}{8+3(\infty)^2+6(\infty)^4}=\frac{\infty}{\infty}$$

Por lo que será necesario dividir primero el numerador y denominador por x^4 , que es la variable que hay con el mayor exponente o término de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^3+8}{8+3x^2+6x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^4-3x^3+8}{x^4}}{\frac{8+3x^2+6x^4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^4}-\frac{3x^3}{x^4}+\frac{8}{x^4}}{\frac{8}{x^4}+\frac{3x^2}{x^4}+\frac{6x^4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{1}-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^4}}{\frac{8}{x^4}+\frac{3}{x^2}+\frac{6}{1}}$$

$$=\frac{5-\frac{3}{\infty}+\frac{8}{\infty^4}}{\frac{8}{\infty^4}+\frac{3}{\infty^2}+6}=\frac{5-0+0}{0+0+6}=\frac{5}{6}$$

Ejemplo 2: Obtén el límite el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x-1}$$

En este ejemplo el término de mayor grado se presenta en el numerador y ocupando el método estricto de los matemáticos se hace de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{6x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{3-\frac{4}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}}{\frac{6}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{3-0+0}{0-0}=\frac{3}{0}=\infty$$

Ejemplo 3: Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^3-5x^2+x-2}{7x^4+x^3-2x}$$

En este ejemplo el término de mayor grado se presenta en el denominador y ocupando el método estricto de los matemáticos se hace de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^3-5x^2+x-2}{7x^4+x^3-2x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}+\frac{x}{x^4}-\frac{2}{x^4}}{\frac{7x^4}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}-\frac{2x}{x^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{7+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}-\frac{2}{\infty^4}}{7+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty^3}}=\frac{0-0+0-0}{7+0-2}=\frac{0}{7}=0$$

Actividades de Desarrollo

Si analizas a detalle, no requiere de tanto procedimiento matemático, si se aplican las reglas que se presentan en la introducción:

Repitiendo el

Ejemplo 1: Obtén el límite de la

Función: $y = \frac{5x^4-3x^3+8}{8+3x^2+6x^4}$ cuando x tiende a infinito (∞).

Como la función presenta el término de mayor grado de orden "4", entonces podemos hacer lo siguiente:

$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-3x^3+8}{8+3x^2+6x^4}$ anotamos sólo los coeficientes de x^4 quedando:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 - 3x^3 + 8}{8 + 3x^2 + 6x^4} = \frac{5}{6}$$

Observa si coincide con la respuesta del procedimiento largo y haz tus comentarios con tus compañeros y el facilitador.

Repitiendo el ejemplo 2 se puede hacer de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x - 1}$$

Como la función presenta el término de mayor grado de orden "2" y está en el numerador, entonces podemos hacer lo siguiente:

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+2}{6x-1}$ anotamos sólo el coeficiente de x^2 y todos los demás términos quedan con ceros, la expresión será:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x - 1} = \frac{3 - 0 + 0}{0 - 0} = \frac{3}{0} = \infty$$

Observa si coincide con la respuesta del procedimiento largo y haz tus comentarios con tus compañeros y el facilitador.

Repitiendo el ejemplo 3 se puede hacer de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + x - 2}{7x^4 + x^3 - 2x}$$

En este ejemplo el término de mayor grado se presenta en el denominador:

$\lim_{n\to\infty} \frac{x^3-5x^2+x-2}{7x^4+x^3-2x}$ la expresión queda por simple inspección:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + x - 2}{7x^4 + x^3 - 2x} = \frac{0 - 0 + 0 - 0}{7 + 0 - 0} = \frac{0}{7} = 0$$

1. Ejercicio: Como un pequeño repaso de lo que has aprendido, resuelve lo siguiente con tus compañeros dentro de clase:

   a) Escribe en tu cuaderno la función $f(x) = \frac{x^4+8}{3x-2x^4}$ y encuentra el límite, cuando x tiende a infinito.

   b) Obtén el límite cuando x tiende a 6, de la función $f(x) = \frac{x-6}{x^2-36}$

   c) Encuentra el límite: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}$

   d) Encuentra el límite: $\lim_{x\to 3} \frac{3x^3-2x^2+8x+3}{x^2-2}$

Actividades de cierre

1. Determina el límite de las siguientes sucesiones:

a) $1, {}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{3}, {}^{1}/_{4}, {}^{1}/_{5}, \dots$

b) $2, {}^{5}/_{2}, {}^{8}/_{3}, {}^{11}/_{4}, {}^{14}/_{5}, \dots$

c) ${}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{4}, {}^{1}/_{8}, {}^{1}/_{16}, {}^{1}/_{32}, \dots$

2. Calcula el límite de $y = x + 2$, siendo x los términos de las siguientes sucesiones:

a) $1, {}^{1}/_{4}, {}^{1}/_{9}, {}^{1}/_{16}, {}^{1}/_{25}, \dots$

b) $5,\ 4, {}^{11}/_{3}, {}^{7}/_{2}, {}^{17}/_{5}, \dots$

c) $0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999$

3. Calcula los siguientes límites con una aproximación a 0.0001 (una diezmilésima)

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

e) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

4. Resuelve los siguientes límites sin uso de las aproximaciones:

a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x)$

b) $\lim_{x \to 2} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$

d) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

e) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$

f) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+5x+6}{x+1}$

g) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{4x^2+5x+6}$

h) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

i) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

Ejercicios Adicionales

1. Sabemos que ya tienes ansiedad por practicar lo que acabas de aprender, para esto te planteamos los siguientes ejercicios, resuélvelos por los dos métodos con el tiempo que requieras en casa:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 4x + 1}{5x^3 + x^2 - 3} =$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 - x + 3}{2x^2 + x - 3} =$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x - 2}{7 - 9x} =$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3 - 4x^2 + 2x}{6x^4 + x^2 - 3} =$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 - 1}{x^2 + x - 3} =$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 8}{4x^3 - x^2 - 7} =$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{3}x + 8}{\frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{7}{2}} =$

2. Una persona tiene una lámina de fierro cuadrada de 21 cm por lado, también requiere una caja sin tapa, en este caso la base de la caja será cuadrada. Se cortarán cuadros congruentes en las esquinas, para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar la caja,

¿Cómo debe hacerse esto para obtener una caja del máximo volumen posible?

Bloque 3 | La derivada

3.1 Interpretación geométrica de la derivada como límite

Introducción

Tenemos dos problemas con el mismo tema: Nuestro primer problema es muy antiguo; se remonta a la época del gran científico griego Arquímedes (287-212 A.C.). Nos referimos al problema de la pendiente de la recta tangente. Nuestro segundo problema es más reciente. Surgió con los intentos de Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) y otros, para describir la velocidad de un cuerpo en movimiento. Es el problema de la velocidad instantánea. Los dos problemas, uno geométrico y el otro mecánico, parecen no estar muy relacionados, pero las apariencias engañan. Los dos problemas son gemelos idénticos.

Comencemos con el problema de la tangente: Imaginémonos una montaña rusa como la de la figura:

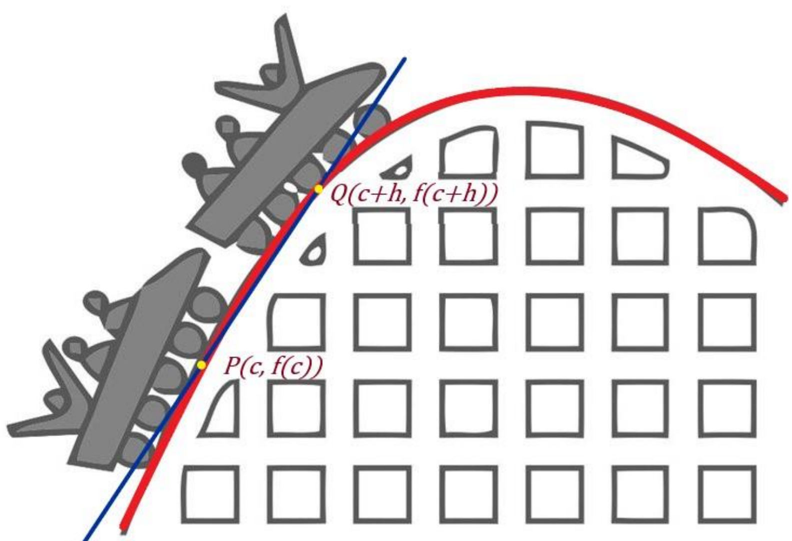


Figura 3.1. Recta tangente en una curva

La curva remarcada en rojo, que representa una de la montaña rusa, está dada por una función de la forma $y = f(x)$. Los puntos de color amarillo tocan esa curva en lugares diferentes. Las coordenadas del punto P son $(c,\ f(c))$. El punto Q, que está en una posición más alta que el punto P, tiene las coordenadas $\left(c+h,\ f(c+h)\right)$. La recta secante que une esos dos puntos (marcada en azul) tiene pendiente m_{sec} dada por:

$$m_{sec} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Mediante el concepto de límite, que hemos estudiado anteriormente, ahora podemos dar una definición formal de la recta tangente:

*La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\left(c,\ f(c)\right)$ es aquella recta que pasa por P con pendiente*

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} m_{sec} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o −∞.

Para el problema de la velocidad instantánea, pensemos que estamos en la parte más alta de una torre y dejamos caer una pelota. Supongamos que la pelota se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como ***función posición*** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = c$ hasta $t = c + h$, el cambio en la posición es $f(c+h) - f(c)$. La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es:

$$v_{promedio} = \frac{desplazamiento}{tiempo} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Figura 3.1.1. Velocidad instantánea en lanzamiento de una pelota

Esta pendiente podríamos visualizarla como una recta secante como la que veíamos en la montaña rusa.

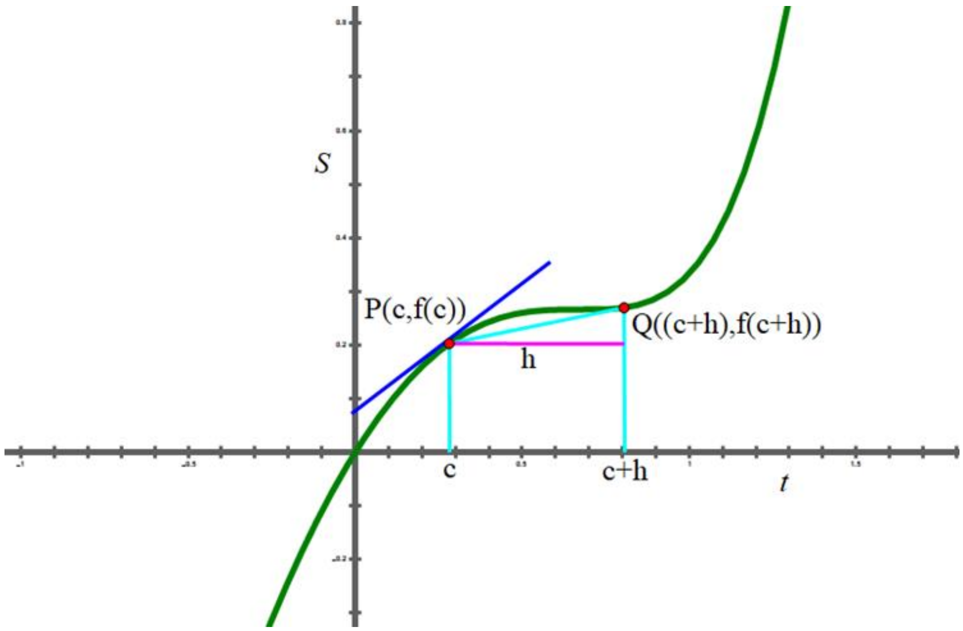


Figura 3.1.2. Velocidad promedio

Al calcular las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $(c, c+h)$ más y más cortos, llegará el momento en que h tienda a *0*. Así llegamos a la definición de velocidad instantánea:

*Si un objeto se mueve a lo largo de un eje coordenado con función de posición entonces su **velocidad instantánea en el instante c es***

$$v = \lim_{h \to 0} = m_{promedio} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista y no sea ∞ o −∞.

Como te darás cuenta, la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea son manifestaciones de la misma idea básica. Posteriormente estudiaremos este concepto independientemente de estos vocabularios especializados y de sus diversas aplicaciones. Esto lo haremos usando el nombre de “derivada”, cuya definición es la siguiente:

La derivada de una función f es otra función (léase "f prima") cuyo valor en cualquier número x es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Si este límite existe, decimos que f es ***derivable*** en x. Determinar una derivada recibe el nombre de ***derivación***; la parte del cálculo asociada con la derivada se denomina ***cálculo diferencial***.

Aplicando lo anterior, vamos a calcular la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = 5x - 3$$

Se debe calcular el $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

La expresión $f(x+h)$ indica que la función f debe evaluarse en $(x+h)$. Así, $f(x+h) = 5(x+h) - 3$.

Luego, reemplazamos $f(x+h)$ y $f(x)$ en la fórmula de la siguiente manera y simplificamos la expresión.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h) - 3 - (5x - 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - 3 - 5x + 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 5 = 5$$

Por lo tanto, si $f(x) = 5x - 3$, entonces $f'(x) = 5$.

Ahora resolvamos una un poco más difícil. Calculamos la derivada de la función $g(u) = (2u + 1)^2$

En este caso, $g(u+h) = [2(u+h) + 1]^2$

Luego,

$$g'(u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2(u+h)+1]^2 - (2u+1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2(u+h)+1+(2u+1)][2(u+h)+1-(2u+1)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2u+2h+1+2u+1)(2u+2h+1-2u-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4u+2h+2)(2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2(4u+2h+2)$$

$$= \lim_{h \to 0} 2(4u+2h+2)$$

$$g'(u) = 2(4u+0+2) = 8u+4$$

Como puedes notar, las letras usadas en la función pueden ser diferentes, pero podemos aplicar la misma fórmula si tenemos claro el concepto de la derivada como límite. En este segundo ejemplo, el resultado es $g'(u) = 8u + 4$.

Actividades de Apertura

1. En tu cuaderno o en un software graficador de funciones:

a) Dibuja la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$.

b) Ubica el punto $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

c) Traza la recta tangente para P. Recuerda que es solo en un punto donde la recta toca la curva.

d) Ahora encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto P:

Primero debes hallar la pendiente de la recta tangente con la fórmula:

$$m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

e) En seguida, para encontrar la ecuación de la recta, aplica la forma punto – pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

considerando las coordenadas del punto P para (x_0, y_0).

2. Completa las siguientes frases:

a) La recta que más se aproxima a una curva cerca del punto P es la _________ que pasa por ese punto.

b) Con mayor precisión, la recta tangente a una curva en P es la posición límite de las rectas ___________ que pasan por P y Q cuando Q se aproxima a P lo largo de la curva.

c) La pendiente m_{tan} de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $\left(c, f(c)\right)$, está dada por ___________.

d) La velocidad instantánea de un punto P (que se mueve a lo largo de una recta) en el instante c es el límite de ______________ en el intervalo de c a $c + h$ cuando h se aproxima a cero.

Actividades de Desarrollo

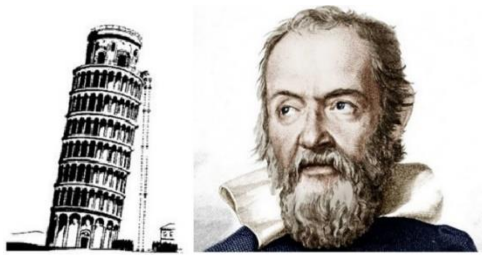


Figura 3.1.3. Galileo Galilei y experimento de caída libre

Imagina que estás en la plataforma superior de observación de una torre, a $450\ m$ sobre el nivel del suelo.

a) Investiga la ley de caída libre de Galileo y la ecuación que la expresa.

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea? Utiliza el dato del punto anterior para calcularlo.

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de $5\ segundos$?

d) ¿Y después de $7\ segundos$?

e) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

Actividades de cierre

1. Utilizando la definición de la derivada de una función, determina la derivada de cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

a) $f(x) = 5x - 3.$

b) $f(x) = x^3 + 7x$

c) $f(x) = 7x^2 - 5x + 9$

d) $f(x) = 3x^2 + 4$

e) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

f) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

g) $f(x) = x^4 + x^2$

h) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

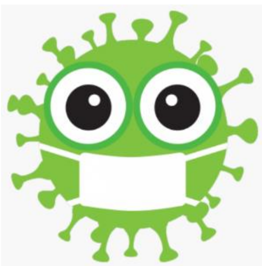
i) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

j) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

Actividades de contexto o Transversales

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Cierto cultivo de bacteria crece de modo que tiene una masa $\frac{1}{2}t^2 + 1$ de gramos después de t horas.



a) ¿Cuánto creció durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$?

b) ¿Cuál fue la tasa promedio de crecimiento durante ese mismo intervalo?

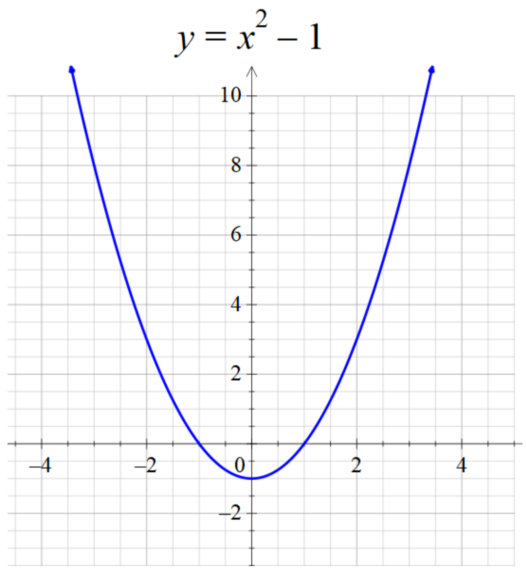
c) ¿Cuál fue su tasa instantánea de crecimiento en $t = 2$?

2. Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) una vez que transcurren t segundos, está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentra la velocidad cuando $t = 2$.

3. La razón (tasa) de cambio de la velocidad con respecto al tiempo se llama aceleración. Supongamos que la velocidad de una partícula en el instante t está dada por $v(t) = 2t^2$. Encuentra la aceleración instantánea cuando $t = 1$ segundo.

Ejercicios Adicionales

1. Encuentra las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 1$ en los puntos donde $x = -2, -1, 0, 1, 2$. Dibuja las rectas en el gráfico.



2. El costo (en pesos) de producir x unidades de caretas protectoras es:

$$C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$$

Encuentra la razón de cambio promedio de C respecto a x, cuando cambia el nivel de producción de

a. $x = 100$ a $x = 105$.

b. $x = 100$ a $x = 101$.

Halla la razón de cambio instantáneo de C respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como costo marginal).

3.2 Derivación de funciones algebraicas

Introducción

Como aprendiste anteriormente, la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea son manifestaciones de la misma idea básica. Ejemplos de la vida cotidiana son: el crecimiento de una planta es la tasa de cambio de la altura con respecto al tiempo (biología), la velocidad de disolución (química), la densidad de un alambre (física), la velocidad de un vehículo es la tasa de cambio de la distancia con respecto al tiempo. Todos son otras versiones del mismo concepto básico.

La derivada $f'(x)$ proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un valor de x. Cuando la recta tangente está ascendiendo hacia la derecha, la derivada es positiva y cuando la recta tangente está descendiendo a la derecha, la derivada es negativa. También es común emplear otras letras para denotar una función, por ejemplo: $g(t) = 2t^4 - 8t^2 + 7x$.

Actividades de Apertura

Analiza el vídeo de las Reglas básicas para derivar una función algebraica:

YouTube https://www.youtube.com/watch?v=Lar1i_YrJvg

Aquí tienes una descripción detallada de las reglas o fórmulas que se emplean en cálculo para obtener de manera directa la derivada de funciones que se presentan con más frecuencia en los planteamientos de problemas y que por sus características son fáciles de generalizar.

1. **Regla para la función constante:**

Si $\boldsymbol{f(x) = c}$, donde c es una constante, entonces para cualquier x, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$

Ejemplos:

$f(\boldsymbol{x}) = 7$ $\qquad f'(\boldsymbol{x}) = 0$

$f(x) = \pi$ $\qquad f'(x) = 0$

$f(x) = c,\ \ donde\ \boldsymbol{c}\ es\ una\ constante$ $\qquad f'(x) = 0$

$f(x) = -15$ $\qquad f'(x) = 0$

2. Regla para derivar la función identidad:

Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ entonces $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$

3. Regla para derivar la potencia:

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$ donde n es un entero positivo, entonces $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$

Ejemplos:

1. $f(s) = s^8$ $\qquad f'(s) = 8s^{8-1} = 8s^7$
2. $f(x) = x^5$ $\qquad f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$
3. $f(t) = t^{\frac{3}{4}}$ $\qquad f'(t) = \frac{3}{4}t^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}$
4. $g(w) = -w^{\frac{3}{8}}$ $\qquad g'(w) = -\frac{3}{8}w^{\frac{3}{8}-1} = -\frac{3}{8}w^{-\frac{5}{8}}$
5. $h(u) = u^{\frac{3}{7}}$ $\qquad h'(u) = \frac{3}{7}u^{\frac{3}{7}-1} = \frac{3}{7}u^{-\frac{4}{7}}$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{-\boldsymbol{n}}$ donde n es un entero negativo, entonces $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{x}^{-\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$

Ejemplos:

1. $j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{-\mathbf{4}}$ $\qquad j'(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{-\mathbf{4}-\mathbf{1}} = -\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{-\mathbf{5}}$
2. $k(r) = r^{-9}$ $\qquad k'(r) = -9\,r^{-9-1} = -9\,r^{-10}$
3. $f(s) = \frac{1}{s^8} = 1s^{-8}$ $\qquad f'(s) = -8s^{-8-1} = -8s^{-9}$
4. $y = x^{\frac{-4}{3}}$ $\qquad y' = x^{\frac{-4}{3}-1} = x^{\frac{-7}{3}}$
5. $g(t) = t^{\frac{-1}{2}}$ $\qquad g'(t) = \frac{-1}{2}\,t^{\frac{-1}{2}-1} = \frac{-1}{2}t^{\frac{-3}{2}}$

4. Regla del múltiplo constante:

Sea c una constante, que multiplica a x^n la función derivable, entonces $f(x) = cx^n$, su derivada es $\boldsymbol{f'(x) = c \cdot n \times^{n-1}}$

Ejemplos:

1. $f(\boldsymbol{r}) = 7r^5$ $\quad$ $f'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{7(5)r^{5-1} = 35r^4}$
2. $f(w) = \frac{3}{5}w^4$ $\quad$ $f'(w) = \frac{3}{5}(4)w^{4-1} = \frac{12}{5}w^3$
3. $y = 6x^{-3}$ $\quad$ $y' = 6(-3)x^{-3-1} = -18x^{-4}$
4. $H(r) = \frac{7}{2}r^2$ $\quad$ $H'(r) = \left(\frac{7}{2}\right)(2)r^{2-1} = 7\mathrm{r}$
5. $P(t) = 9t^8$ $\quad$ $\frac{d(9t^8)}{dt} = 9(8)\mathrm{t}^{8-1} = 72\mathrm{t}^7$

5. Regla para la suma algebraica de dos o más funciones:

Sean f y g dos funciones derivables, entonces $y = (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, su derivada es $\boldsymbol{y' = f'(x) \pm g'(x)}$

1. Encuentra la derivada de las siguientes funciones. Puedes utilizar cualquier símbolo para derivar: $\boldsymbol{y', f'(x), \frac{dy}{dx}}$,

a) Determina la derivada de $y = 4x^3 + 6x - 9$

$$\frac{d(4x^3 + 6x - 9)}{dx} = \frac{d(4x^3)}{dx} + \frac{d(6x)}{dx} - \frac{d(9)}{dx} = 4(3)x^{3-1} + 6x^{1-1} - 0$$

$$\frac{d(4x^3 + 6x - 9)}{dx} = 12x^2 + 6x^0 = 12x^2 + 6$$

$$\frac{d(4x^3 + 6x - 9)}{dx} = 12x^2 + 6$$

Recuerda que, cualquier número elevado a la cero es uno, $x^0 = 1$, $8^0 = 1$, $¶^0 = 1$

b) Determina la derivada de $y = 3x^6 + 2x^2$

$$y' = \frac{d(3x^6 + 2x^2)}{dx} = \frac{d(3x^6)}{dx} + \frac{d(2x^2)}{dx}$$

$$y' = (3)(6)x^{6-1} + (2)(2)x^{2-1} = 18x^5 + 4x$$

$$y' = 18x^5 + 4x$$

c) Deriva $g(t) = 5t^6 - 4t^3 + 3t^2 - 7$ $\quad g'(t) = \frac{d(5t^6)}{dt} - \frac{d(4t^3)}{dt} + \frac{d(3t^2)}{dt} - \frac{d(7)}{dt}$

$$= 5(6)t^{6-1} - 4(3)t^{3-1} + 3(2)t^{2-1} - 0 = 30t^5 - 12t^2 + 6t$$

$$g'(t) = 30t^5 - 12t^2 + 6t$$

d) Deriva $y = 4x^{-3} + 7x^8$ $\quad y' = (4)(-3)x^{-3-1} + (7)(8)x^{8-1} = -12x^{-4} + 56x^7$

e) Deriva $H(s) = 3s^5 - 2s^4 + 7s^2 - 4$ $\quad H'(s) = \frac{d(3s^5 - 2s^4 + 7s^2 - 4)}{ds} = \frac{d3s^5}{ds} - \frac{d2s^4}{ds} + \frac{d7s^2}{ds} - \frac{d4}{ds}$

$$= 3(5)s^{5-1} - 2(4)s^{4-1} + 7(2)s^{2-1} - 0 = 15s^4 - 8s^3 + 14s$$

$$H'(s) = 15s^4 - 8s^3 + 14s$$

Actividades de Desarrollo

6. Regla para el producto de dos funciones:

Podemos establecer la regla con diferente notación. Por ejemplo:

I. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables, entonces $f(x) \cdot g(x)$, su derivada es $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

II. También podemos representar la derivada del producto de dos funciones como

$f(x) = \mathrm{u}$ y $g(x) = \mathrm{v}$ entonces $\boldsymbol{y = u \cdot v}$ su derivada es $\boldsymbol{y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}}$

1. Encuentra la derivada de las siguientes funciones, siguiendo la estructura de regla del Punto II.

a) $\boldsymbol{y = (2x^3 + 5x)(4x - 9)}$.

Es importante establecer quien es u y quien es v, y su respectiva derivada.

$$u = 2x^3 + 5x \qquad\qquad v = 4x - 9$$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 5 \qquad\qquad \frac{dv}{dx} = 4$$

Entonces:

$$y' = (2x^3 + 5x)(4) + (4x - 9)(6x^2 + 5) = 8x^3 + 20x + 24x^3 + 20x - 54x^2 + 45$$

reduciendo términos semejantes, $\quad y' = 32x^3 - 54x^2 + 40x + 45$

b) $\boldsymbol{y = (x^6 - 4x^2)(2x + 5)}$

Es importante identificar $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, y su respectiva derivada.

$u = x^6 - 4x^2$ $\qquad$ $v = 2x + 5$

$\frac{du}{dx} = 6x^5 - 8x$ $\qquad$ $\frac{dv}{dx} = 2$

Al sustituir de acuerdo con la regla se tiene:

$$y' = (x^6 - 4x^2)(2) + (2x + 5)(6x^5 - 8x) = 2x^6 - 8x^2 + 12x^6 - 16x^2 + 30x^5 - 40x$$

se reducen términos semejantes,

$$y' = 14x^6 + 30x^5 - 24x^2 - 40$$

c) $\boldsymbol{R(t) = (4t^2 - 7)(2t^4 - t)}$

$$\frac{d}{dt}(4t^2 - 7)(2t^5 - t) = (4t^2 - 7)\frac{d}{dt}(2t^5 - t) + (2t^5 - t)\frac{d}{dt}(4t^2 - 7)$$

$$= (4t^2 - 7)\,[2(5)(t^{5-1} - t^{1-1}] + (2t^5 - t)[4(2)t^{2-1} - 0]$$

$$= (4t^2 - 7)\,(10t^4 - 1) + (2t^5 - t)(8t)$$

$$\frac{d}{dt}(4t^2 - 7)(2t^5 - t) = 40t^6 - 4t^2 - 70t^4 + 7 + 16t^6 - 8t^2$$

Reduciendo términos semejantes

$$\frac{d}{dt}(4t^2 - 7)(2t^5 - t) = 56t^6 - 70t^4 - 12t^2 + 7$$

Recuerda que puedes resolver la derivada siguiendo la estructura del inciso I o II, cualquiera de las dos formas. Si te es más fácil el inciso II sigue siempre esta forma.

d) $\boldsymbol{G(s) = (5s^2 + 2s)(s^4 + 2s^3 + 1)}$

Nombras a una de las funciones con u y a la otra con v

$u = 5s^2 + 2s$ $\qquad$ $v = s^4 + 2s^3 + 1$

Derivas ambas funciones

$u' = 10s^{2-1} + 2s^{1-1} = 10s + 2$ $\qquad$ $v' = 4s^{4-1} + 2(3)s^{3-1} = 4s^3 + 6s^2$

Aplica la regla: $\boldsymbol{y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}}$

$$G'(s) = (5s^2 + 2s)(4s^3 + 6s^2) + (s^4 + 2s^3 + 1)(10s + 2)$$

Realiza las operaciones algebraicas

$$G'(s) = 20s^5 + 30s^4 + 8s^4 + 12s^3 + 10s^5 + 2s^4 + 20s^4 + 4s^3 + 10s + 2$$

Reduce términos semejantes

$$G'(s) = 30s^5 + 60s^4 + 16s^3 + 10s + 2$$

7. Regla para el cociente de dos funciones:

Sean $f(\times)$ y $g(\times)$ dos funciones derivables, entonces $\frac{\boldsymbol{f}(\times)}{\boldsymbol{g}(\times)}$ su derivada es $\left(\frac{\boldsymbol{f}(\times)}{\boldsymbol{g}(\times)}\right)' = \frac{\boldsymbol{g}(\times)\cdot\boldsymbol{f}'(\times)-\boldsymbol{f}(\times)\cdot\boldsymbol{g}'(\times)}{\boldsymbol{g}^2(\times)}$

También podemos representar la derivada del cociente de dos funciones como

$f(x) = u$ y $g(x) = v$ entonces $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ su derivada es $\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right) = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}-\boldsymbol{u}\cdot\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dx}}}{\boldsymbol{v}^2}$

e) $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{3x+2}}{\boldsymbol{x^2+5}}$

Se establece que u es el numerador y v el denominador.

$u = 3x + 2$ $\qquad$ $v = x^2 + 5$

$\frac{du}{dx} = 3$ $\qquad$ $\frac{dv}{dx} = 2x$

Entonces:

$y' = \frac{(x^2+5)(3)-(3x+2)(2x)}{(x^2+5)^2}$ desarrolla en tu libreta la operación algebraica y simplifica

f) $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{5r^4-7r^2}}{\boldsymbol{r^3+5r}}$

Nombra a cada función con u y v,

Se establece que u es el numerador y v el denominador.

$u = 5r^4 - 7r^2$ $\qquad$ $v = r^3 + 5r$

Deriva ambas funciones

$\frac{du}{dr} = 20r^3 - 14r$ $\qquad$ $\frac{dv}{dr} = 3r^2 + 5$

Ordena como lo establece la regla: $\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right) = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$ (recuerda que puede emplearse diferente notación tanto para representar funciones como sus respectivas derivadas).

$$y' = \frac{(r^3 + 5r)(20r^3 - 14r) - (5r^4 - 7r^2)(3r^2 + 5)}{(r^3 + 5r)^2}$$

Puedes desarrollar la operación algebraica y simplificar

$$y' = \frac{(20r^6 - 14r^4 + \ 100r^4 - 70r^2) - (15r^6 + 25r^4 - 21r^4 - 35r^2)}{(r^3 + \ 5r)^2}$$

$$y' = \frac{20r^6 - 14r^4 + \ 100r^4 - 70r^2 - 15r^6 - 25r^4 + 21r^4 + 35r^2}{(r^3 + \ 5r)^2} = \frac{5r^6 + 82r^4 - 35r^2}{(r^3 + \ 5r)^2}$$

$$y' = \frac{5r^6 + 82r^4 - 35r^2}{(r^3 + \ 5r)^2}$$

g) $\boldsymbol{H(t)} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5t^3+3t}}$

Identifica a cada función con u y v,

Se establece que u es el numerador y v el denominador

$$u = 4 \qquad\qquad v = 5t^3 + \ 3t$$

Deriva ambas funciones

$$u' = 0 \qquad\qquad v' = 15t^2 + 3$$

Ordena como lo establece la regla: $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}}$

$$H'(t) = \frac{(5\mathrm{t}^3 + \ 3\mathrm{t})(0) - (4)(15t^2+3)}{(5t^3+3t)^2}$$

Puedes desarrollar la operación algebraica y simplificar

$$H'(t) = \frac{0 - (60\mathrm{t}^2 + 12)}{(5\mathrm{t}^3 + \ 3\mathrm{t})^2} = \frac{-60\mathrm{t}^2 - 12}{(5\mathrm{t}^3 + \ 3\mathrm{t})^2}$$

$$H'(t) = \frac{-60t^2 - 12}{(5\mathrm{t}^3 + \ 3\mathrm{t})^2}$$

8. Regla de la cadena (Derivada de una composición de funciones)

La regla de la cadena se utiliza para funciones compuestas: Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces:

$$(f \ o \ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Combinaremos la regla de la cadena con la regla de la potencia. Si n es cualquier número real y $u \ = \ g(x)$ diferenciable, entonces:

La derivada de u^n es:

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o $y = u^n$ $y' = nu^{n-1}u'$

Ejemplo:

h) Determinar la derivada de la función $\boldsymbol{y = (5 \times^2 - 9)^6}$

Identifica $\boldsymbol{u}$ y deriva la función $\boldsymbol{u}$. Identifica a $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ es el exponente de $\boldsymbol{u}$.

$$\boldsymbol{n = 6}$$

$u = 5x^2 - 9$ su derivada es $u' = 10x$

Ordena como lo establece la regla para derivar $y = u^n$ $y' = nu^{n-1}u'$

$$y' = 6(5x^2 - 9)^{6-1}(10x) = 60x(5x^2 - 9)^5$$

i) Determinar la derivada de la función $\boldsymbol{f(s) = (4s^3 + 5s)^7}$

$$\boldsymbol{n = 7}$$

$u = 4s^3 + 5s$ su derivada es $u' = 12s^2 + 5$

Ordena como lo establece la regla de la derivada de $y = u^n$, $y' = nu^{n-1}u'$

$$f'(s) = 7(4s^3 + 5s)^{7-1}(12s^2 + 5) = (84s^2 + 35)(4s^3 + 5s)^6$$

$$f'(s) = (84s^2 + 35)(4s^3 + 5s)^6$$

j) Determinar la derivada de la función $\boldsymbol{y = 5\sqrt{x^4 - 7x + 2} = 5(x^4 - 7x + 2)^{\frac{1}{2}}}$

Identifica quién es u y deriva la función u. identifica a n, n es la potencia de u.

$$\boldsymbol{n = \frac{1}{2}}$$

$u = x^4 - 7x + 2$ su derivada es $u' = 4x^3 - 7$ Ordena como lo establece la regla para derivar a $\boldsymbol{y = Cu^n}$, donde C es el coeficiente de u;

$$\boldsymbol{y' = Cnu^{n-1}u''}$$

$$y' = 5\left(\frac{1}{2}\right)(x^4 - 7x + 2)^{\frac{1}{2}-1}(4x^3 - 7) = 5\left(\frac{4}{2}x^3 - \frac{7}{2}\right)(x^4 - 7x + 2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \left(\frac{20}{2}x^3 - \frac{35}{2}\right)(x^4 - 7x + 2)^{-\frac{1}{2}} = \left(10x^3 - \frac{35}{2}\right)(x^4 - 7x + 2)^{-\frac{1}{2}}$$

k) Determinar la derivada de la función $\boldsymbol{H(s) = 4(6s^9 - 5s)^8}$

$$\boldsymbol{n = 8}$$

$u = 6s^9 - 5s$ su derivada es $u' = 54s^8 - 5$

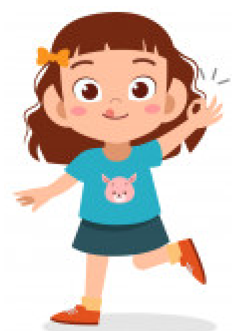
Ordena como lo establece la regla para derivar a $y = Cu^n \quad y' = Cnu^{n-1}u'$

$$y' = 4[8(6s^9 - 5s)^{8-1}(54s^8 - 5)] = 32(6s^9 - 5s)^7(54s^8 - 5)$$
$$f'(s) = (1728\,s^8 - 160)(6s^9 - 5s)^7$$

1. Determina la derivada de las siguientes funciones mediante el uso de las reglas para derivar una función algebraica.

a) $f(x) = 9x^3 + 6x$

b) $f(y) = \frac{7}{4}y^4 - \frac{3}{2}y^2$



c) $g(x) = \frac{5}{7}x^4 + \frac{6}{5}x^3$

d) $H(r) = \sqrt[3]{r^6} + \sqrt[5]{r}$

e) $f(x) = \frac{11}{4x^3} - \frac{7}{9x}$

f) $R(x) = \frac{8}{4x^5} + \frac{12}{3x^4}$

g) $Q(w) = 7\sqrt{w^3} + \frac{6}{\sqrt[4]{w^2}} - w$

h) $f(x) = 12x^3 - 5x + 2$

i) $J(n) = (9n^4 + 3n)(2n - 4)$

j) $f(x) = (5x^2 + 7x)(4x^3 - 3)$

k) $P(z) = \left(3\sqrt{z^6} + 2z\right)(3z - 9)$

l) $g(r) = (r^2 + 17)(r^3 - 3r + 1)$

m) $j(t) = (3t^2 + 2t)(t^4 - 3t + 1)$

n) $f(x) = \frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 4x}$

o) $f(t) = \frac{t^5 - 9t}{3t^2 + t}$

p) $j(s) = \frac{5}{s^4+1} + \frac{3}{s}$

q) $f(y) = \frac{(7y-3)}{y^2+7}$

r) $H(t) = (2t^3 + t^2)^7$

s) $f(m) = (8m^5 - 4m)^4$

t) $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

u) $v(r) = \sqrt[4]{5r^2 + 2r - 6}$

v) $v(t) = \frac{2t}{t^2-t}$

w) $H(r) = \frac{3}{\sqrt{r-2}}$

Actividades de cierre

De acuerdo a la Interpretación geométrica de la derivada, al derivar una función, ésta proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* (x) en un valor de x.

Además recuerda que, para determinar la ecuación de una línea recta, conocidos un punto $P(x, y)$ y su pendiente m es: $y = m\,(x - x_1) + y_1$

Ejemplo 1: Determina la ecuación de la recta tangente a la función $y = x^2 - 3x + 2$ en el punto $P(4, 6)$.

La derivada de la función $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ es $f'(x) = 2x - 3$.

Para determinar la pendiente m, cuando $x = 4$, se sustituye el valor de x, en $f\,'(x)$

$m = f'(4) = 2(4) - 3 = 8 - 3 = 5$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$, que pasa por el punto $P(4,\ 6)$ y pendiente $m = 5$, es:

$y = 5(x - 4) + 6 = 5x - 20 + 6 = 5x - 14;$

∴ La Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$, es: $y = 5x - 14$.

También, recuerda que al derivar una función, se resuelve el problema de la velocidad instantánea, que describe la velocidad de un cuerpo en movimiento en un instante.

Ejemplo 2: Sea un objeto que se desplaza a una velocidad $v(t) = 16t^2$, determina la velocidad instantánea en el tiempo *t* = 1 segundo.

$$v'(t) = 16(2)t = 32t$$

Al sustituir el valor de $t = 1$ segundos, en la función derivada $v'(t)$ se tiene la velocidad instantánea,

$v'(1) = 32(1) = 32\ \mathrm{m/s}$.

1. Aplicando las reglas estudiadas anteriormente resuelve los siguientes ejercicios:
   a) Encuentra la pendiente y ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 4$, en el punto $P(3,5)$; además, construye la gráfica de la función $f(x)$ y $f'(x)$ en el intervalo $[-4,4]$.

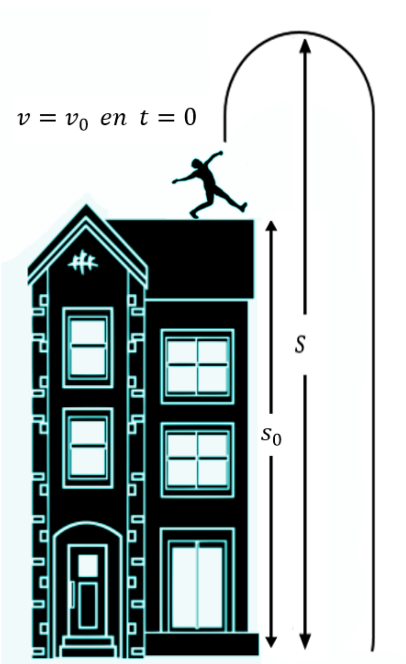
   b) Encuentra la pendiente y ecuación de la recta tangente a $g(t) = t^3$ en el punto $P(2,8)$; además, construye la gráfica de la función $f(x)$ y $f'(x)$ en el intervalo $[-3,3]$.

   c) Encuentra la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $v(t) = -t^2 + 2t + 2$ en el punto $(-1,-1)$.

   d) Considera la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Determina la tasa de cambio instantánea.

Encuentra la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 - 2x + 2$ en el punto $(1,1)$.

Actividades de contexto o Transversales



Algunas aplicaciones del Cálculo Diferencial se encuentran en la Física. Por ejemplo: Si un objeto se lanza directamente hacia arriba desde una altura inicial de S_o metros, con una velocidad inicial v_o metros por segundo y si S es su altura por arriba del piso en metros después de t segundos, entonces:

$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

Esto supone que el experimento se lleva a cabo cerca del nivel del mar y que se desprecia la resistencia del aire. El diagrama de la figura 3.2 describe la situación que se plantea. Observa qué velocidad positiva significa que el objeto está moviéndose hacia arriba.

Figura 3.2. Lanzamiento de un objeto hacia arriba

Ejemplo: Desde lo alto de un edificio, de 160 *pies* de altura, se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial (v_0) de 64 *pies por segundo*.

a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?

b) ¿Cuál es su altura máxima?

c) ¿Cuándo llega al piso?

d) ¿A qué velocidad (v) llega al piso?

e) ¿Cuál es su aceleración (a) en $t = 2$ segundos?

En el tiempo $t = 0$, corresponde al instante cuando la pelota fue lanzada.

Además, Altura inicial $S_o = 160\,pies$ y velocidad inicial $v_o = 64$ (v_o es positiva, ya que la pelota se lanzó hacia arriba). Así

$$s = -16t^2 + 64t + 160$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

Donde: a es la aceleración en ${}^{pies}/_{s^2}$

a) La pelota alcanzó su altura máxima en el instante en que su velocidad fue cero, esto es cuando:

$$-\,32\,t + 64 = 0$$

$-\,32\,t = -\,64$ multiplica por (-1) en ambos lados de la ecuación

$$(-1)\,(-\,32t) = (-\,64)\,(-1)$$

$$32\,t = 64$$

$$t = \frac{64}{32}$$

$$t = 2\,segundos$$

b) En $t = 2\,segundos$, $S(2) = -16(2)2 + 64(2) + 160 = 224\,pies$

c) La pelota llega al piso $s = 0$, esto es, cuando

$$s = -16t^2 + 64t + 160 = 0$$

Dividiendo toda la función entre -16, se tiene

$$t^2 - 4t - 10 = 0$$

Al sustituir en la fórmula general de segundo grado (fórmula cuadrática) se tiene:

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{(16+40)}}{2} = \frac{4 \pm 7.48}{2}$$

Si $t_1 = \frac{4+7.48}{2} = \frac{11.48}{2} = 5.74$, sólo la respuesta positiva tiene sentido. Así que, la pelota llega al piso en $t = 5.74\ segundos$.

d) En $t = 5.74\ s$, $v = -32\ (5.74) + 64 \approx -183.68 + 64 = -119.73$. Así, la pelota llega al piso con una rapidez de $119.73\ pies\ por\ segundo$.

e) La aceleración (a) en $t = 2\ segundos$, la aceleración es siempre $-32\ {}^{pies}/_{s^2}$. Esta es la aceleración debido a la gravedad cerca del mar.

Ejercicios:

1. Un objeto que se lanza directamente hacia arriba está a una altura

$s = -16t^2 + 48t + 256$, la s es medida en $pies$ después de t segundos.

a) ¿Cuál es su velocidad inicial?
b) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
c) ¿Cuál es su altura máxima?
d) ¿Cuándo llega al suelo?
e) ¿A qué velocidad (v) llega al suelo?

2. Un objeto lanzado directamente hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad inicial $v_o = 48\ {}^{pies}/_{s}$, la trayectoria que describe es $s = -16t^2 + 48t\ pies$ de altura al final de $t\ segundos$.

a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?
b) Al final de un segundo, ¿qué tan rápido se está moviendo el objeto y en qué dirección?
c) ¿Cuánto tarda en regresar a su posición original (nivel del piso)?

3. Un proyectil se dispara directamente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial v_o en pies por segundo, su altura (en pies) y a los t segundos, está dada por: $s = v_0 t - 16t^2$

¿Cuál debe ser su velocidad inicial para que el proyectil alcance una altura máxima de 1 milla?

4. Un determinado modelo de avión despega al alcanzar una velocidad $v = 300\ km/h$, en el tiempo $t = 30\ segundos$ de estar acelerando por la pista. Su función de desplazamiento se puede aproximar con $s(t) = ct^2$, donde: $s(t)$ es la distancia, t el tiempo, c es un parámetro. Responda a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el valor del parámetro c?

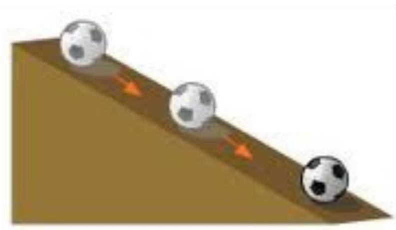
b) ¿Podrá este avión despegar de una pista que mide $1500\ metros$?

5. La altura s, medida en pies, a la que se encuentra un balón, por encima del suelo a los t segundos está dada por $s = -16t^2 + 40t + 100$

a) ¿Cuál es su velocidad instantánea en $t = 2$?

b) ¿En qué tiempo su velocidad instantánea es cero?

Una pelota rueda hacia abajo a lo largo de un plano inclinado, de modo que su distancia s desde su punto de inicio después de t segundos es $s = 4.5t^2 + 2t\ pies$. ¿En qué tiempo su velocidad instantánea será de $30\ {}^{pies}/_{s}$?



Ejercicios Adicionales

Determina la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(y) = 4y^2 + 2y$
2. $R(x) = \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2$
3. $G(x) = \frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{5}x^3$
4. $g(t) = \sqrt{t^5} + \sqrt{t^3}$
5. $H(s) = \frac{5}{3s^2} - \frac{8}{2s}$
6. $f(w) = \frac{4}{7w^7} + \frac{6}{w^4}$
7. $f(x) = 4 \times^4 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - x$
8. $f(k) = 14k^2 - 6k + 7$
9. $f(x) = (3x^2 + 5x)(4x - 9)$
10. $C(x) = (2x^2 + 6x)(2x^3 - 7)$
11. $P(x) = (2\sqrt{x^3} + 4x)(6x - 5)$
12. $T(x) = \frac{x^5 + 7x}{x^2 - 8x}$
13. $f(h) = \frac{5h^7 - 2h}{6h^2 + h}$
14. $f(j) = (5j^3 + 6j^2)^4$
15. $f(v) = (6v^7 - 5v)^8$
16. $f(x) = 4x^4 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - x$

3.3 Comportamiento de los máximos y mínimos

Introducción

En el cálculo diferencial un tema relacionado con la derivada de una función es la determinación de **máximos y mínimos** de una función cuadrática, cúbica o polinomial de más grados, tomando como precedente temas de álgebra y geometría analítica considerándose como precálculo.

¿Cómo podemos saber cuál es el punto máximo o el punto mínimo en el comportamiento de una función? Para determinar un punto máximo o punto mínimo en una función, necesitarás rescatar conocimientos básicos de una función **creciente** y **decreciente** estudiadas anteriormente, así como **concavidad** y **punto de inflexión** de una función; visualizando de manera gráfica la localización de los puntos y proceder a los cálculos analíticos por cualquiera de los dos métodos que existen para determinar los **máximos y mínimos** de una función.

En una función polinomial, podemos encontrar puntos máximos y mínimos absolutos, pero también podemos encontrar puntos máximos y mínimos relativos, los cuales están relacionados con las partes crecientes y decrecientes de una función polinomial, así como determinar la concavidad positiva o negativa y su punto de inflexión.

Actividades de Apertura

Para lograr el desarrollo del tema de máximos y mínimos en el cálculo diferencial, es necesario el repaso y la comprensión de temas relacionados con álgebra y geometría analítica, como son expresiones algebraicas, término algebraico y elementos de un término algebraico, grado de un término, términos semejantes, monomios y polinomios, factorizaciones, plano cartesiano y localización de puntos en el plano cartesiano, gráfica y tabla de funciones, pendiente de una recta y sus condiciones para determinar el crecimiento o decrecimiento de una función.

Instrucciones: Escribe " según consideres Falsa o Verdadera la aseveración en cada enunciado.

1. 1 La expresión algebraica, es una representación que se aplica a un conjunto de literales y números que conforman una o más operaciones algebraicas.

F" o "V"

2. Los coeficientes numéricos, son los factores literales que contienen el término algebraico.

____

3. El grado de un término algebraico, puede ser de dos formas, absoluto y relativo a una literal.

____

4. En una expresión algebraica, el término entero es aquel que no tiene denominador literal (½ m).

____

5. Los términos semejantes, son aquellos que tienen distinto factor literal, variando solo el coeficiente.

____

6. Los polinomios, son aquellos que constan de más de un término; son la suma algebraica de monomios. __________

7. La pendiente de una recta, es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de las abscisas. __________

8. Para determinar el valor de una pendiente, se determina por la proporción de los incrementos en las abscisas dividido en los incrementos de las ordenadas.

____

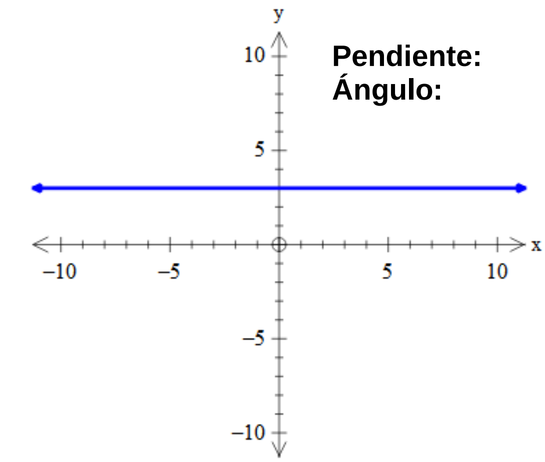
10. 9. Cuando la recta es constante, se dice que la pendiente es infinita.

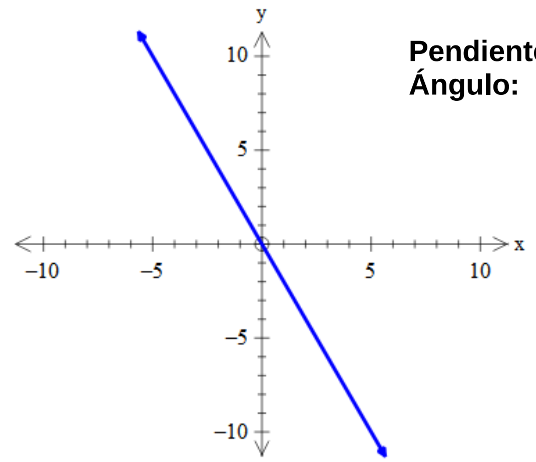
____

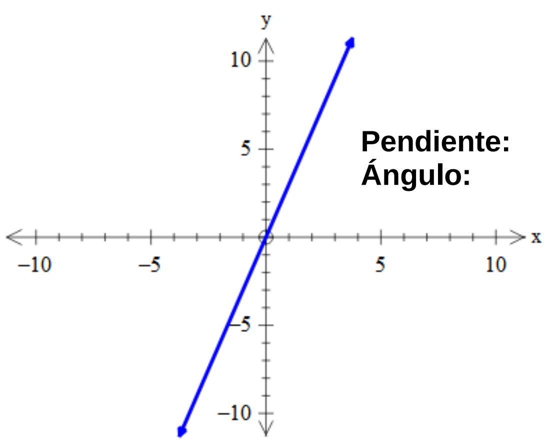
En la pendiente de una recta, si ***m < 0*** la función es creciente y el ángulo es agudo.

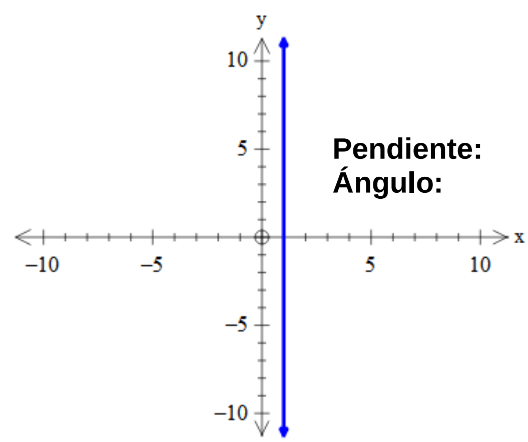
Recuperación de conocimientos

Indica para cada uno de los siguientes casos si la pendiente de la recta es posita o negativa y como es el valor del ángulo correspondiente (mayor, menor o igual a 0° o 90°)









Considerando las diferentes formas en que se presenta el valor de la pendiente de una recta en el plano, indica cual representa cada una de las gráficas anteriores.

PENDIENTE

Negativa

Al aumentar la variable independiente (x), disminuye la variable independiente (y), va de derecha a izquierda y sus valores son $90° < x < 180°$

Positiva

Al aumentar la variable independiente (x), aumenta también la variable independiente (y), va de izquierda a derecha y sus valores son $0° < x < 90°$

Cero

No existe inclinación de la recta al ser completamente horizontal, por lo que el valor de la pendiente es cero.

Indefinida

La recta es completamente vertical y el ángulo de inclinación es 90°. Se extiende hasta el infinito de manera indefinida.

Actividades de Desarrollo

1. Observa las características de las funciones crecientes y decrecientes en un determinado intervalo y selecciona la opción correcta en los enunciados.

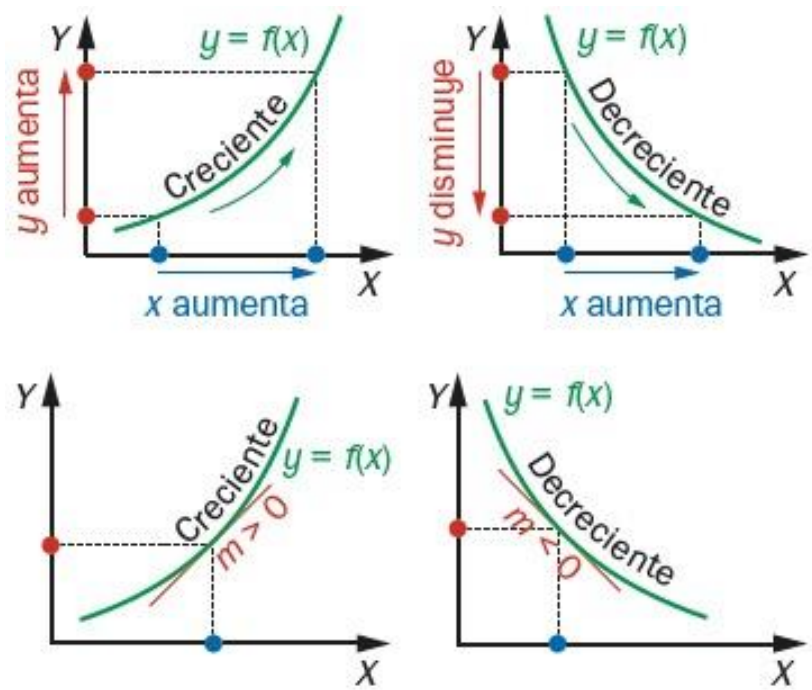


Figura 3.3.1. Características de las funciones crecientes y decrecientes

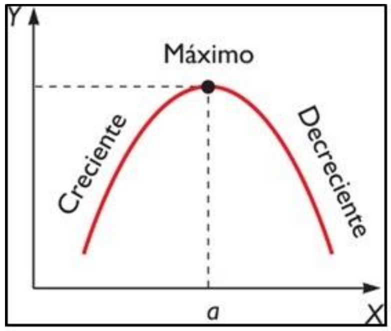
a) En una función creciente, cuando la variable independiente aumenta, la variable dependiente (**aumenta / disminuye**).

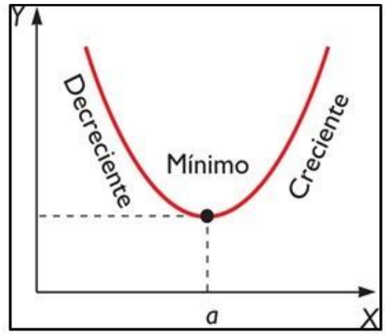
b) En una función decreciente, cuando la variable independiente aumenta, la variable dependiente (**aumenta** / **disminuye**).

c) En una función creciente, la pendiente de una recta tangente es (**positiva** / **negativa**), es decir, su ángulo de inclinación es (**mayor** / **menor**) de 90°.

d) En una función creciente, la pendiente de una recta tangente es (**positiva** / **negativa**), es decir, su ángulo de inclinación es (**mayor** / **menor**) de 90°.

2. Ahora representamos una función cuadrática con la concavidad de una ecuación cuadrática.





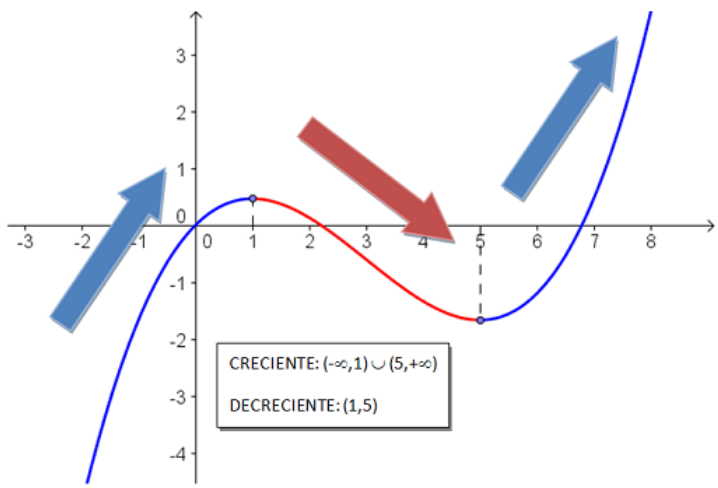
$f''(a) > 0$: $f(x)$ es convexo en $x = a$

$f''(a) < 0$: $f(x)$ es cóncavo en $x = a$

Selecciona las opciones correctas:

a) Un Máximo se encuentra en una función cuando ésta pasa de (**creciente / decreciente**) a (**creciente / decreciente**)

b) Un mínimo se encuentra en una función cuando ésta pasa de (**creciente / decreciente**) a (**creciente / decreciente**)



La mejor forma de entender la concavidad de una función es con su gráfica. Una función es **cóncava positiva (+)** si abre hacia **arriba** y **cóncava negativa (-)** si abre hacia **abajo**, esta última también recibe el nombre de convexa. La **segunda derivada** ayuda a determinar los intervalos de concavidad de una función.

En la siguiente gráfica de una función de tercer grado (cúbica), se observa en que intervalos crece o decrece la función.

En una función cúbica puede representar los criterios, creciente y decreciente, así como la concavidad y el punto de inflexión (representa el cambio de las concavidades).

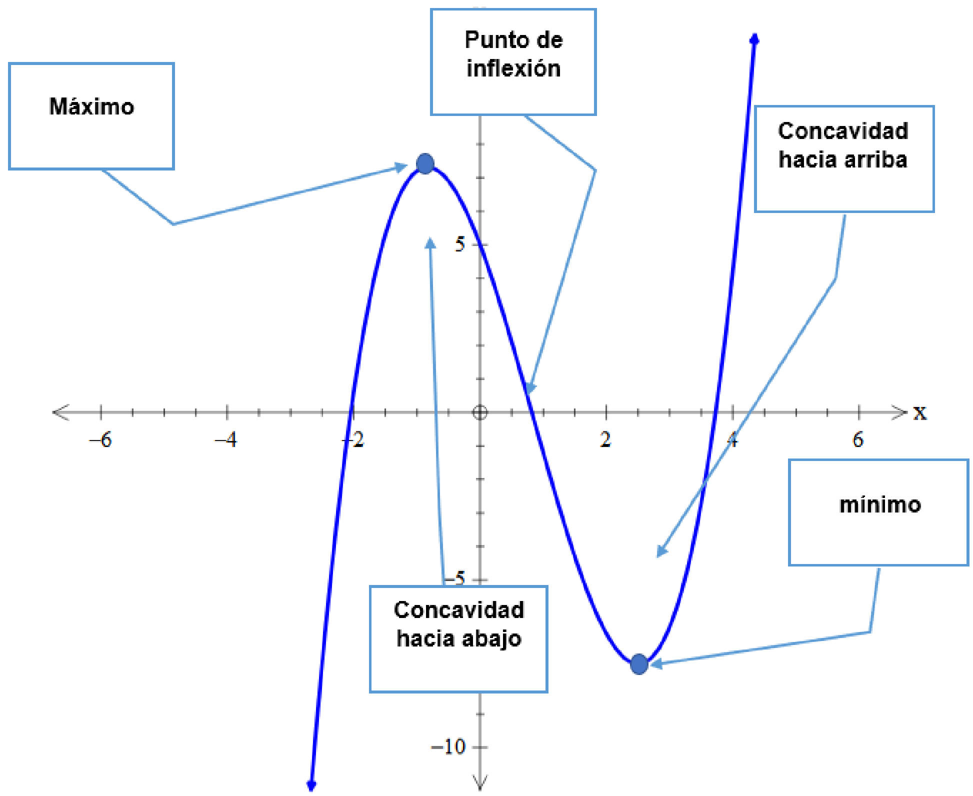


Figura 3.3.2. Concavidad y puntos de inflexión

Una característica de los puntos de inflexión es que son los puntos donde la función derivada tiene máximos y mínimos; si nos fijamos en las gráficas, cuando nos acercamos a un punto de inflexión, la función cada vez crece más o decrece menos, lo cual significa que justamente donde haya un punto de inflexión la derivada tendrá un máximo o un mínimo. Consecuentemente encontraremos los puntos de inflexión igualando a cero la segunda derivada. Analiza dos métodos para determinar los valores máximos y mínimos de una función:

I. Método de la primera derivada para calcular los valores máximo y mínimo de una función.

1. Obtener el valor de la derivada de la función. *2. Igualar a cero la ecuación que resulta.* *3. Resolver la ecuación para hallar el valor crítico x.* *4. Sustituir el valor crítico de x en la función dada y encontrar el valor de $f(x)$.* *5. Tomar un valor ligeramente menor y otro ligeramente mayor que el valor crítico de x y sustituir en la derivada de la función.* *6. Si la pendiente resultante* cambia un valor (+) a (-) entonces, se trata de un máximo, y si cambia de (-) a (+) entonces es un mínimo.

Ejemplo 1: Determina los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

1. Se obtiene la derivada de la función

$$f(x)' = 3x^2 - 3$$

2. Igualando a cero la ecuación resultante

$$3x^2 - 3 = 0$$

3. Resolviendo para hallar los valores críticos

$$3\,(x^2 - 1) = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x^2 = \pm 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$

4. Sustituyendo los valores críticos en la función origen para calcular los valores de $f(x)$.

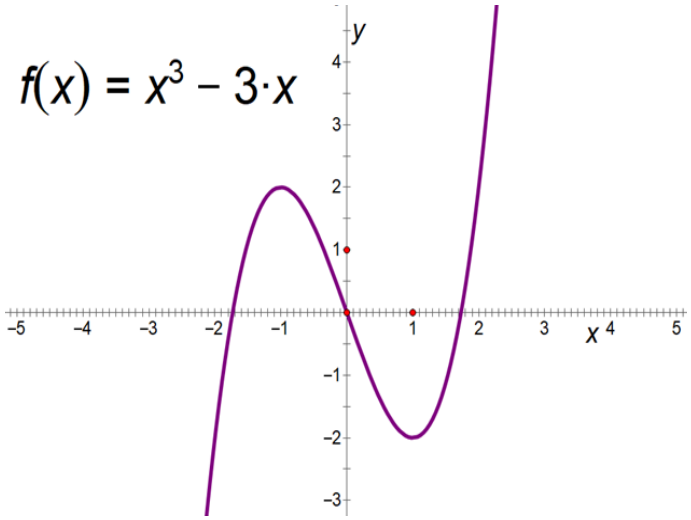
$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$f(1) = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = \ -2$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = \ -1 + 3 = \ 2$$

5. Tomando valores un poco menor y un poco mayor de cada valor crítico y sustituir en la derivada.

Para x = 1		**Para x = - 1**	
Un poco menor **(x=0)**	un poco mayor **(x=2)**	Un poco menor **(x=-2)**	un poco mayor **(x=0)**
$3x^2 - 3 = 0$	$3x^2 - 3 = 0$	$3x^2 - 3 = 0$	$3x^2 - 3 = 0$
$3(0)^2 - 3 = 0$	$3(2)^2 - 3 = 0$	$3(-2)^2 - 3 = 0$	$3(0)^2 - 3 = 0$
-3	**+9**	**+9**	**-3**

mínimo **máximo**

Para el valor crítico $x = 1$, al sustituir los valores, los resultados cambian de (-) a (+) obteniendo el mínimo relativo, y para el valor crítico $x = -1$, al sustituir los valores, los resultados cambian de (+) a (-) obteniendo el máximo relativo.



II: Método de la segunda derivada para calcular los valores máximo y mínimo de una función.

1. Obtener el valor de la primera derivada *2. Igualar a cero la ecuación que resulta, para hallar el valor de* (x). *3. Obtener el valor de la segunda derivada y se iguala con cero.* *4. Sustituir el valor crítico de* (x) *en la función dada y encontrar el valor de* $f(x)$. *5. Se sustituye el valor crítico en la segunda derivada para determinar la concavidad.* *6. Si el valor del resultado es (+), la concavidad es hacia arriba (mínimo) y si el valor del resultado es (-), la concavidad es hacia abajo (máximo).*

Ejemplo 2: Determina los máximos y mínimos de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x}$$

1. Se obtiene la primera derivada de la función

$$\boldsymbol{f(x)' = 3x^2 - 3}$$

2. Resolviendo para hallar los valores críticos

$$\boldsymbol{3\,(x^2 - 1) = 0}$$
$$\boldsymbol{x^2 = 1}$$
$$\boldsymbol{x^2 = \pm 1}$$
$$\mathbf{x = \pm\sqrt{1}}$$
$$\mathbf{x_1 = 1} \quad \text{y} \quad \mathbf{x_2 = -1}$$

3. Se obtiene la segunda derivada

$$\boldsymbol{f(x)'' = 6}\mathbf{x}$$

4. Igualando a cero la ecuación resultante

$$\mathbf{6x = 0}$$

Resolviendo para hallar el punto de inflexión

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{6}}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

5. Sustituir el valor de (x) en la función origen para determinar el valor de $f(x)$, cuyos valores determinan el punto de inflexión.

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x}$$
$$\boldsymbol{f(x) = (0)^3 - 3(0)}$$

$\boldsymbol{f(x) = 0}$ $\longrightarrow$ **El punto de inflexión es P (0 , 0)**

6. Se determina la concavidad, sustituyendo en la segunda derivada

$\boldsymbol{f(x)'' = 6x}$
$\boldsymbol{f(x)'' = 6(1)}$
$\boldsymbol{f(x)'' = +6}$

+

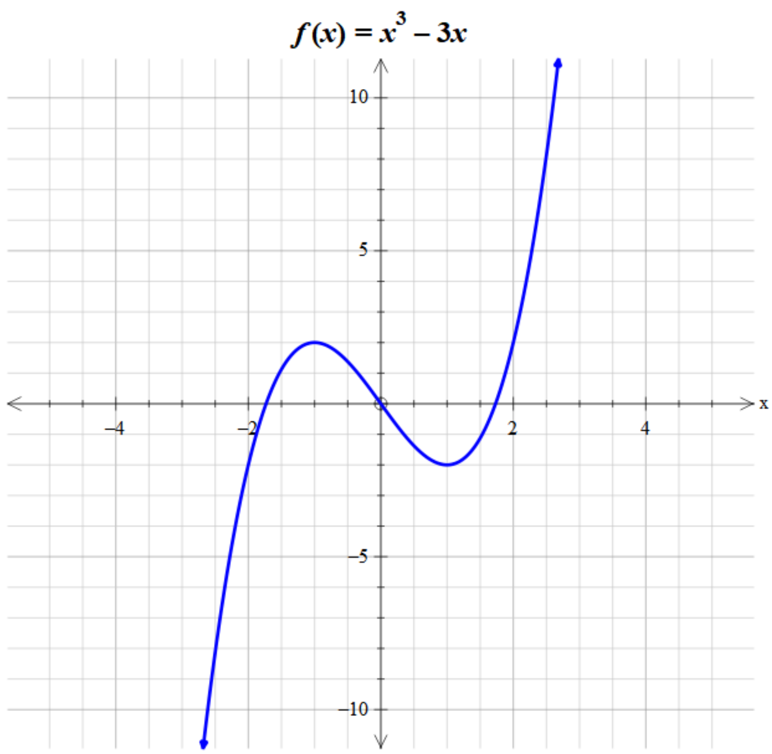
Cóncava positiva (mínimo)

$\boldsymbol{f(x)'' = 6x}$
$\boldsymbol{f(x)'' = 6(-1)}$
$\boldsymbol{f(x)'' = -6}$

-

Cóncava negativa (máximo)

Si $f(x)'' = 0$ entonces falta criterio para determinar el máximo o el mínimo de una función, por lo tanto, se determina por el primer método de la derivada.



Actividades de cierre

1. Observa la siguiente figura y contesta las preguntas:

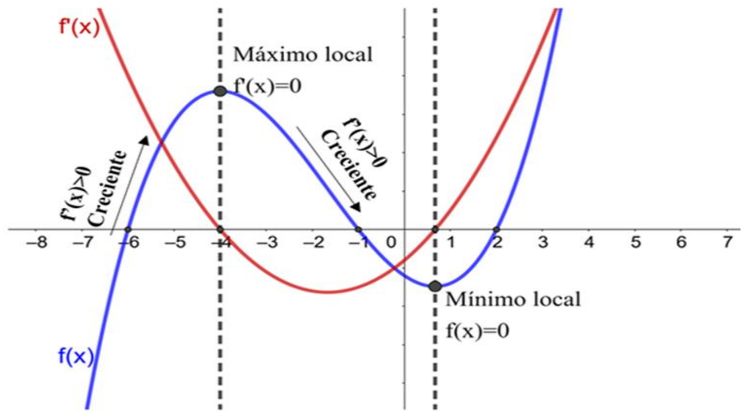


Figura 3.3.3. Máximos y mínimos de una función cúbica y su derivada

a) Al derivar una función cúbica, ¿qué tipo de función se obtiene?

b) Describe brevemente, la relación de los intervalos crecientes y decreciente de la función cúbica en relación a su derivada (función cuadrática).

c) Escribe el símbolo y notación de los intervalos en la función cúbica y también de su derivada.

d) ¿Qué relación tienen el punto máximo y punto mínimo de la función cúbica, respecto a su derivada?

e) ¿Qué relación tienen el punto máximo y punto mínimo de la función cúbica, para determinar la concavidad respecto a la derivada?

f) ¿Con qué parte de la función cuadrática (derivada) está relacionado el punto de inflexión?

Actividades de contexto o Transversales

Resuelve el siguiente ejercicio paso a paso, como se desglosa. Posteriormente resuelve los siguientes ejercicios propuestos tratando de seguir el mismo proceso.

1. Supongamos que el rendimiento r en %, de un alumno en un examen de una hora, viene dado por

$r = 300t\,(1 - t)$, donde $0 < t < 1$ es el tiempo en horas. Se pide:

a) ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

b) ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

c) ¿Cuándo, se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

Aplica los siguientes pasos para determinar la solución a los tres cuestionamientos:

a) ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

La función $r = 300t - 300t^2$, representa el rendimiento del alumno.

Deriva la función y escribe el resultado:

$$r(t)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Para determinar los valores máximos o mínimos de la función iguala la derivada a

$$r(t)' = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

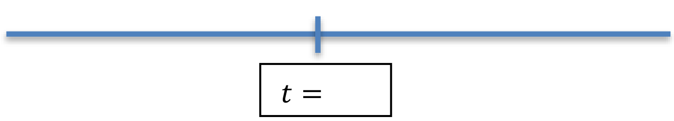
Determina el valor crítico despejando t de la igualdad anterior

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$t = \frac{}{}$$

$$t =$$

Forma los intervalos con el valor crítico:



Toma un valor de cada intervalo y calcula el signo que tiene

Signo= Signo=

t_{menor}= t= t_{mayor}=

Si el resultado es positivo, la función es creciente en ese intervalo, si el resultado es negativo, la función es decreciente en ese intervalo. Realiza un esbozo de la gráfica según los resultados que obtuviste:

t=

b) ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

Iguala la función con cero y despeja los valores de t

$$\mathrm{r} = 300\mathrm{t}\,(1 - \mathrm{t}) = 0$$

La función tiene un valor de cero para t =___ y t =____

¿Cómo interpretas el resultado? ____

c) ¿Cuándo, se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

Determina la ubicación del valor máximo o mínimo con los datos obtenidos en el inciso a) o bien, aplica el criterio de la segunda derivada:

Calcula la segunda derivada de la función: $r(t)'' = \mathbf{-600}$

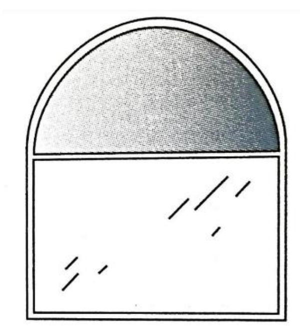
Como la segunda derivada es de signo __________ hay un __________ en el valor crítico.

Calcula la segunda coordenada del máximo o mínimo obtenido en la función.

Las coordenadas del máximo o mínimo de la función son: **A (,   )**

2. Un granjero dispone de $100\,mts$ de valla para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares. ¿Qué dimensiones debe elegir para que el área encerrada sea máxima?

3. Una ventana tiene forma rectangular y está coronada con un semicírculo. El rectángulo es de vidrio transparente, mientras que el semicírculo es de vidrio polarizado, y deja pasar solo la mitad de luz por unidad de área en comparación con el vidrio transparente. El perímetro de la ventana es de $170\ cm$. Obtén las proporciones de la ventana que dejen pasar la mayor cantidad de luz. Ignora el espesor del marco.



Ejercicios Adicionales

1. Resuelve el siguiente ejercicio para la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x}$**.** Grafica.
   a) Determinar el máximo y el mínimo por el método de la primer y segunda derivada
   b) Escribir la simbología de los intervalos crecientes y decrecientes en la función
   c) Determinar la concavidad y el punto de inflexión utilizando la segunda derivada

2. Para cada una de las siguientes funciones, determina sus valores máximos y mínimos aplicando el criterio de la primera derivada, realizando sus gráficas correspondientes.
   a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$

   b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

   c) $f(x) = 3x - x^3$

3. Para cada una de las siguientes funciones, determina sus valores máximos, mínimos y puntos de inflexión aplicando el criterio de la segunda derivada, realizando sus gráficas correspondientes.
   a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

   b) $f(x) = 4x^4 - 4x^2$

3.4 Problemas de optimización

Introducción

El hombre siempre se enfrenta con el problema de encontrar la mejor manera de obtener la ganancia, al menor costo. Por ejemplo, el ranchero quiere escoger la mezcla de pastos para poder obtener el mayor aprovechamiento, un científico desea escoger y aplicar la menor dosis de una vacuna para obtener el mayor aprovechamiento, un fabricante desea minimizar el costo de producción de un producto. Algunas veces, problemas que se presentan ante la vida real, pueden formularse y resolverse, al involucrar una función y así es como el cálculo se vuelve una herramienta muy poderosa para poder resolver este tipo de cuestionamientos.

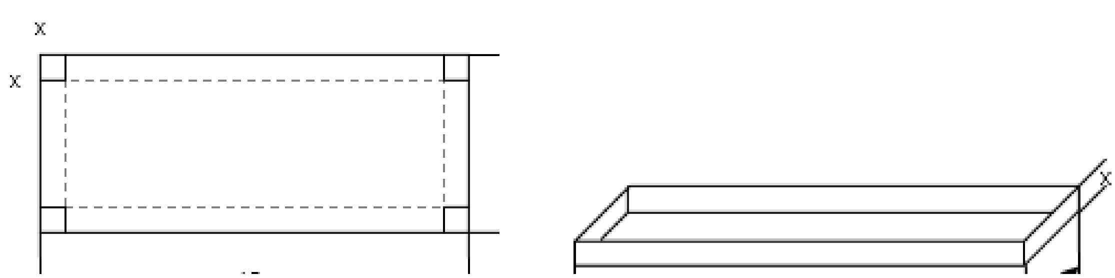
Imagen

Figura 3.4. Isaac Newton

La invención de Isaac Newton se vio lograda, en un momento de encierro, ya que, en 1665, la gran plaga de la peste hizo que se fuera a un retiro en su casa de casi 18 meses y ahí en retiro surgió su método de fluxiones (lo que conocemos hoy como el cálculo diferencial).

Actividades de Apertura

Trabajo en equipo de 5 alumnos. Cada uno de los integrantes del equipo en una hoja tamaño carta realizará trazos de cuadrados que midan de lado 1, 2, 3, 5, 6,7, en cada una de las esquinas, después de trazar los cuadros, recortar de manera que quede unas pestañas a lo largo y ancho de la hoja y la pestaña se doblará para formar cinco cajas sin tapa como se muestra en la figura.



Ya que tienen elaboradas cada una de las cajas, el siguiente paso será calcular el volumen de cada una de ellas.

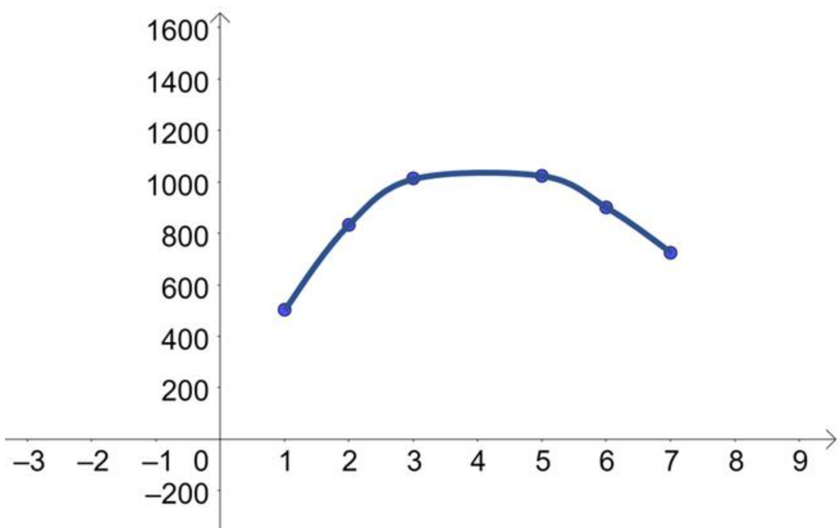
Las operaciones las pueden desarrollar en la siguiente tabla, la sugerencia es que, si alguien trae en su celular el Excel, puede realizar las operaciones.

altura de caja valor de X	largo de la caja 27.8-2x	ancho de la caja 21.5-2X	Vol. de la caja Alt*largo*ancho
1	25.8	19.5	503.1
2	23.8	17.5	833
3	21.8	15.5	1013.7
5	17.8	11.5	1023.5
6	15.8	9.5	900.6
7	13.8	7.5	724.5

Después de llenar la tabla, debemos de hacer los siguientes cuestionamientos:

a) Si con la hoja tamaño carta, me piden hacer una caja, donde contenga el mayor volumen, qué dimensiones son las que nos servirían.
b) Podrá existir otras dimensiones que nos den un mayor volumen.
c) ¿Qué pasa al momento de ir cambiando el valor del lado del cuadrado?
d) ¿Cuál es el máximo valor que le podemos dar al cuadrado?

Para terminar la actividad, graficar los valores, en las abscisas (x) serán los valores del lado del cuadrado y las ordenadas (y), serán los valores del volumen. Decir que función representan los puntos



Ya que realizaste la gráfica, puedes observar que la figura representa una parábola y aquí es donde debes recordar la definición de un máximo local y un mínimo local.

Actividades de Desarrollo

Existen infinidad de problemas de aplicación, que se pueden resolver con la ayuda de los máximos y mínimos y para ello es importante seguir los pasos siguientes:

a) Se hace un bosquejo del problema planteado y así poder interpretarlo
b) Se escribe la función para obtener el máximo o mínimo según sea el caso.
c) Se expresa la función en términos de una sola variable.
d) Se encuentra la derivada de dicha función y se iguala a cero, para determinar los valores críticos.
e) Se obtiene la segunda derivada y sustituimos los puntos críticos para aplicar el teorema.

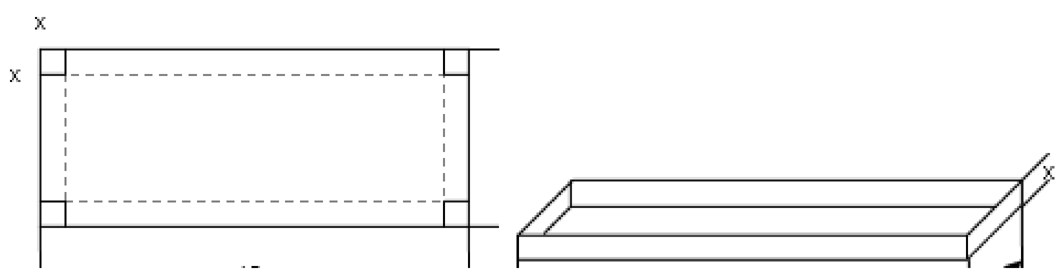
Si f'(c)=0 y f''(c)>0, entonces la función tiene un mínimo.

Si f'(c)=0 y f''(c)<0, entonces la función tiene un máximo.

Ahora resolveremos el problema planteado, que con una hoja tamaño carta, encontrar las dimensiones para poder construir una caja que contenga el mayor volumen.

Siguiendo los pasos anteriores

1. Hacemos el croquis para plantear el problema



2. Escribimos la función

V=largo*ancho*altura

3. Expresar la función en términos de una sola variable, debes recordar que la variable en este caso será la altura (x)

$V=(27.8-2x)(21.5-2x)(x)$ realizando operaciones

$V=4x^3-98.6x^2+597.7x$

4. Obtenemos la derivada, igualamos a cero y obtenemos los puntos críticos

$V'=12x^2-197.2x+597.7$

Igualando a cero y resolviendo la ecuación cuadrática por medio de la fórmula general. Obtenemos los valores de $x_1=12.41$ y $x_2=4.009$

5. Los valores obtenidos (puntos críticos) se sustituyen en la segunda derivada

$V''=24x-197$ para $x=12.41$ $V''=100$; $x=4.009$ $V''=-100.784$

Y aplicando el teorema de la segunda derivada podemos deducir que cuando $x=4.009$, obtendremos una caja con el mayor volumen.

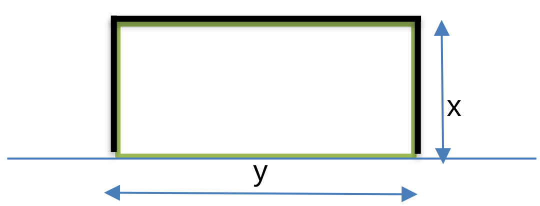
Entonces las dimensiones de la caja: altura 4.009, largo= 19.782 y ancho=13.482

Con este simple ejemplo te puedes dar cuenta de la importancia de tener el conocimiento del cálculo.

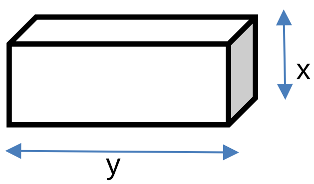
Actividades de cierre

Basándote en el planteamiento de las actividades anteriores, resuelve los siguientes ejercicios:

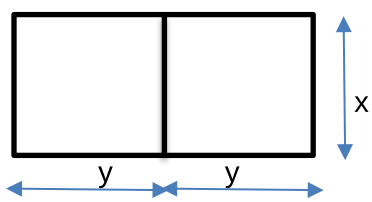
1. Una persona desea construir un corral rectangular para encerrar a su perro, de área tan grande como sea posible. Determina las dimensiones del corral si se dispone de 40 m lineales para cercarlo. Solo se cercarán 3 lados del corral porque se utilizará una pared de una casa como el cuarto lado. ¿Qué dimensiones debe tener el corral?



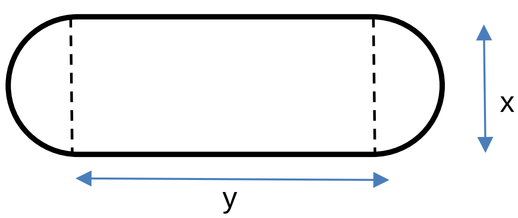
2. Una fábrica de margarina vende su producto en barras que tienen forma de un prisma de base cuadrada cuyo volumen es de 108 cm^3. Determina las dimensiones de la barra que minimizan la cantidad de papel de envoltura (las dimensiones con las que se gastaría menos papel).



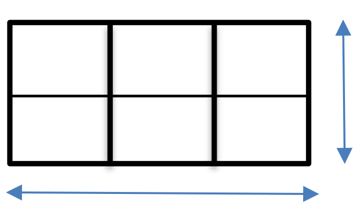
3. Un ganadero dispone de 2000 m de malla para cercar dos corrales rectangulares adyacentes. ¿Cuáles son las dimensiones que para que el área encerrada sea máxima?



4. Un campo de atletismo consiste en un área rectangular con una región semicircular en cada extremo. El perímetro de utilizará como pista de 400 m . Determina el valor de x para el cual el área de la región rectangular es la más grande posible.



5. Se van a utilizar 300 m lineales para construir 6 jaulas en un zoológico, cercando un terreno rectangular y colocando 2 vallas paralelas a ancho y una valla paralela al largo. Encuentra las dimensiones del terreno cercado de mayor área posible



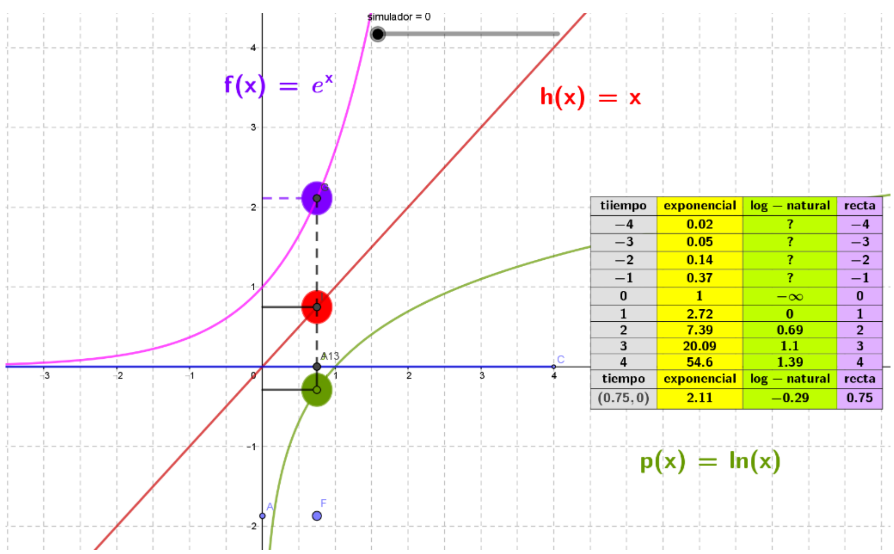
3.4.1 Derivación de funciones Exponenciales

Actividades de Apertura

Dentro del ámbito de funciones existe una expresión exponencial cuya base es: e pertenece a los números irracionales, la expresión se escribe: $f(t) = be^{at}$, se considera la existencia de coeficiente: $b=1$ y $a=1$, se pueden manipular, entonces lo escribimos de la forma: $f(t) = 1e^{1t}$ para valores de:

$t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...seg.$ Según la gráfica se escribe: $e = 2.71828182,.....$

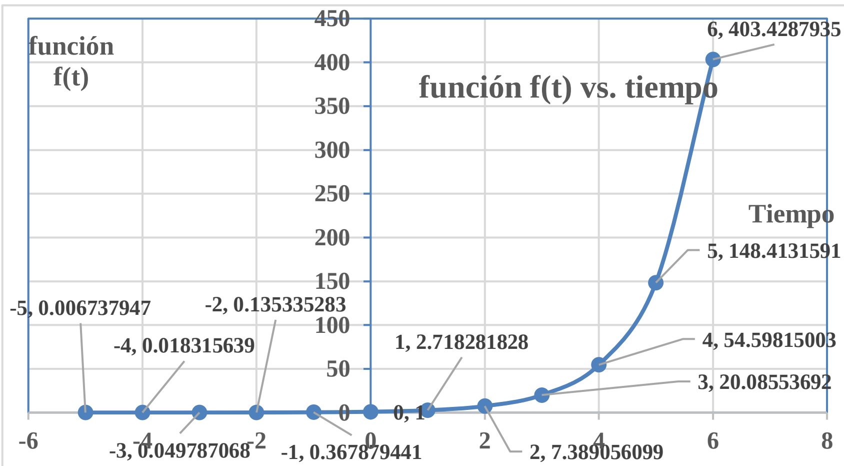
En esté análisis de las funciones exponenciales y logaritmos se establece según su grafica son continuas crecientes y decreciente, se definen como inversas, la función es: $d(t) = b\ e^{a\ t}$, y $d(t) = 1e^{1t}$ posición = distancia en función del tiempo, esta sustentados en la definición de logaritmo natural inversa: $t = \ln f(t)$ utilizando los graficado res o graficando las funciones ambas en su cuaderno de trabajo las funciones $f(t) = e^t$ y $t = \ln f(t)$ tienen comportamiento inversos.



tiiempo	exponencial	log − natural	recta
−4	0.02	?	−4
−3	0.05	?	−3
−2	0.14	?	−2
−1	0.37	?	−1
0	1	−∞	0
1	2.72	0	1
2	7.39	0.69	2
3	20.09	1.1	3
4	54.6	1.39	4
tiempo	exponencial	log − natural	recta
(0.75, 0)	2.11	−0.29	0.75

Figura 3.4.1 ***Gráficas de función exponencial y logarítmicas***

Grafica en tu cuaderno de trabajo o con la ayuda de algun software instalado en la computadora como Excel, la función: $f(t) = be^{at}$ vs. $tiempo$, para determinar los resultados debes echar mano de la calculadora científica y observaras que los resultados que son idénticos a la tabla de la figura 3.4.2. Si el tiempo es negativo tiende la función tiende a ser cero, y si el tiempo tiende a un número muy grande la función tiende a ser infinito.



tiempo	Distancia exponencial
-5	0.006737947
-4	0.018315639
-3	0.049787068
-2	0.135335283
-1	0.367879441
0	1
1	2.718281828
2	7.389056099
3	20.08553692
4	54.59815003
5	148.4131591
6	403.4287935

Tabla 1

Figura 3.4.2. Gráfica de la función $f(t) = be^{at}$

En la siguiente figura, visualizaras el comportamiento del movimiento de un objeto que se mueve en una línea recta, variando los coeficientes. También los puedes visualizar en

YouTube https://www.youtube.com/watch?v=KW2mM_6yk68

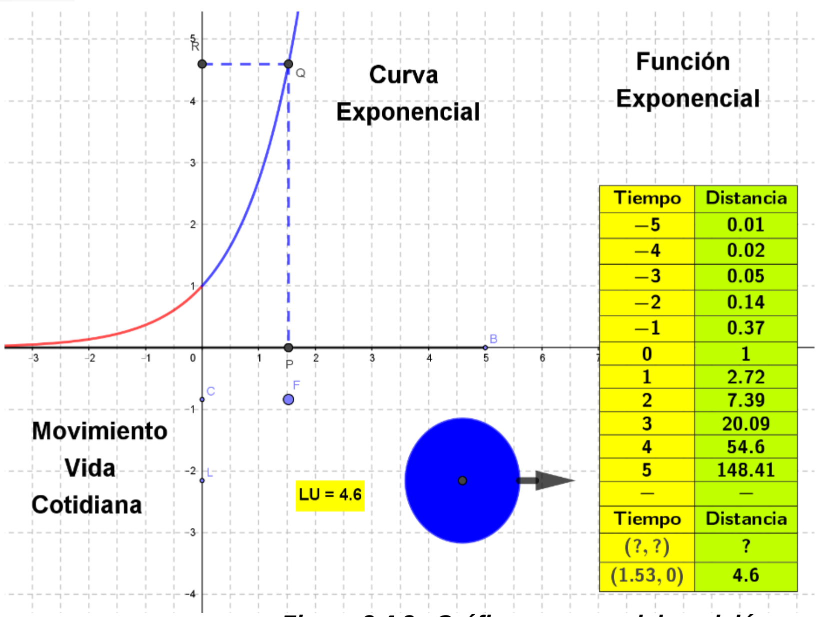


Figura 3.4.3. Gráfica exponencial-posición

Para determinar una recta tangente a cualquier punto de la función $f(t)=e^{U}$ se debe aplicar el concepto de derivada, cuya definición es un modelo matemático:

a) La derivada de una exponencial está dada por: $f'(t)=\frac{d}{dt}f(t)=\frac{d}{dt}e^{U}=e^{U}\frac{d}{dt}U$, en nuestro problema se define la distancia o la posición de objeto: $d'(t)=\frac{d}{dt}d(t)=\frac{d}{dt}be^{at}=be^{at}\frac{d}{dt}at=abe^{at}\frac{d}{dt}t$

b) Para determinar la ecuación de la recta tangente a la distancia o en cualquier punto de la distancia $d(t)$ se debe aplica el concepto de geometría analítica ecuación de una línea recta: $y=mx+b$ y su pendiente de una recta es: $m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ que pasa por dos puntos: $(x_0,\ y_0)$ y $(x,\ y)$

Para aplicar los conceptos anteriores analiza el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Un estudiante se mueve en línea recta que cumple una función definida la distancia en función del tiempo $d(t)=2\ e^{1.5\ t}$ definidos en $t\in[0,\ 5eg.]$, donde los coeficientes son constantes,

Realiza las siguientes actividades:

a) Grafica la función distancia $d(t)=2\ e^{1.5\ t}$ definida $t\in[0,\ 5eg.]$

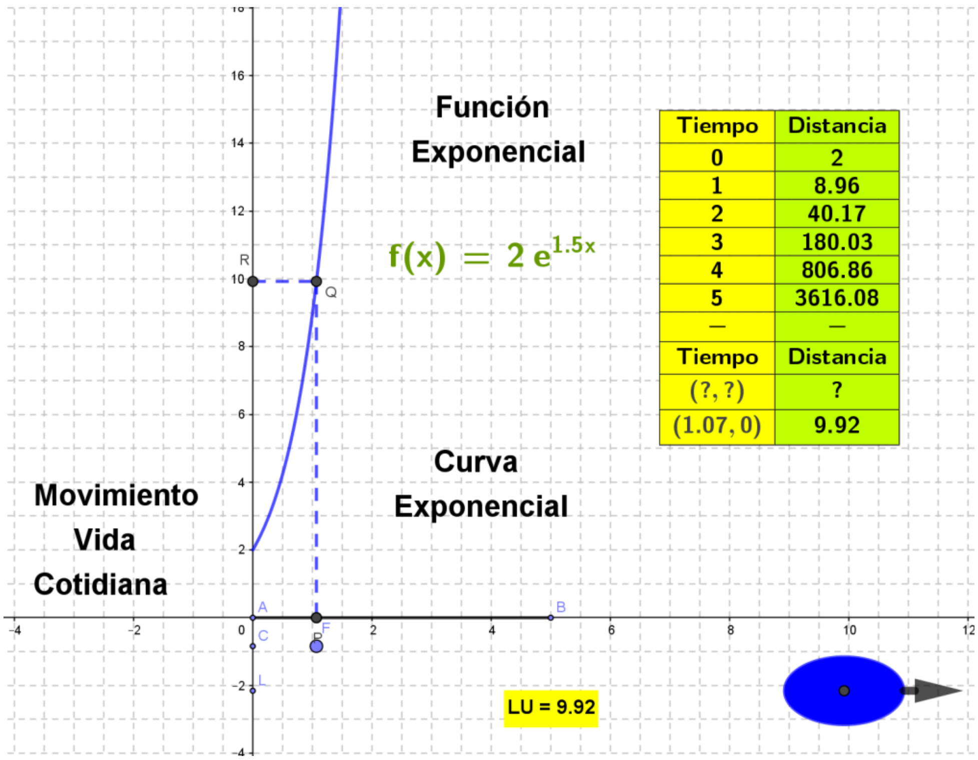
b) Determina la velocidad instantánea “derivada” en los tiempos $t\in[0,\ 5eg.]$

y grafica la velocidad instantánea = derivada

c) Halla la recta tangente que pasa por el punto $t=3\ seg.$

Solución:

a) Grafica en tu cuaderno de trabajo $d(t)=2\ e^{1.5\ t}$ y llena los espacios de la tabla con la ayuda de algún software graficador como GeoGebra, Grafica en tu cuaderno trabajo o apoyate con el software GeoGebra o Excel, y visualiza el comportamiento físico, se debe obtener los mismos resultados.



tiempo	exponencial
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tabla 2

Figura 3.4.4. Grafica-exponencial-posicion

b) Determina la velocidad instantánea en los tiempos $t \in [0,\ 5eg.]$
y grafica la velocidad instantánea = derivada

Aplica el concepto de derivada = velocidad instantánea, y la formula: $v(t) = \frac{d}{dt}e^{U} = e^{U}\frac{d}{dt}U$

Entonces: $v(t) = \frac{e}{dt}\left[2\,e^{1.5\,t}\right] = 2\,e^{1.5\,t}\frac{d}{dt}(1.5t) = 2 * 1.5 * e^{1.5\,t}\frac{d}{dt}t$, este concepto es válido para cualquier exponente donde esté definido. Por lo tanto la velocidad instantánea es: $v(t) = 3 * e^{1.5\,t}$. Grafica en tu cuaderno de trabajo o apoyándote con GeoGebra, visualizarás el movimiento del objeto velocidad instantánea.

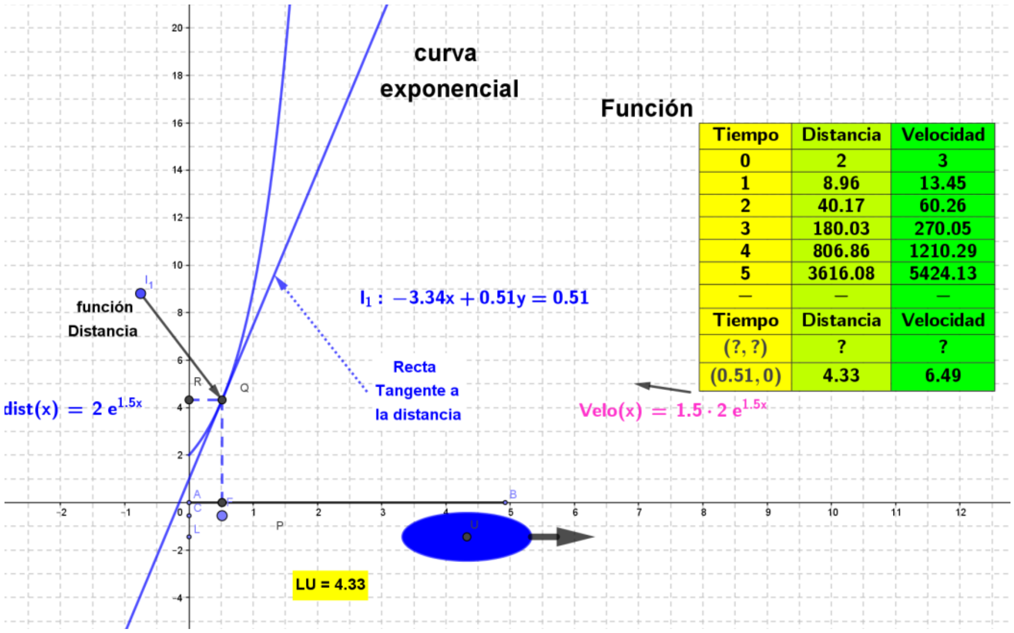


Figura 3.4.5 Gráfica - exponencial-velocidad

c) Hallar la recta tangente que pasa por el punto $t = 3\ seg.$

Para determinar la recta tangente a la distancia en función del tiempo $d(t) = 2\, e^{1.5\, t}$ definidos en $t \in [0,\ 5eg.]$

Se cita lo que se aplicó en geometría analítica: la ecuación de una línea recta: $y = mx + b$ cuya pendientes de la recta es: $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ que pasa por dos puntos: $(x_0,\ y_0)$ y $(x,\ y)$, en nuestro problema se escribe de la forma: velocidad instantánea: $v(t) = \dfrac{d - d_0}{t - t_0}$, que pasa por dos puntos: $(t_0,\ d_0)$ y $(t,\ d)$

Primeramente, se identifica para un tiempo $t = 3\ seg.$, que la distancia $= 180.03427\ m$.

Por lo tanto $(t_0,\ d_0) =$ $(3seg., 180.03427m)$ y tiene una velocidad instantánea: $v(t) = 270.052\ \dfrac{m}{seg.}$. Según la Tabla 2. Se sustituye en la pendiente: $v(t) = \dfrac{d - d_0}{t - t_0}$ y obtenemos: $270.052 \dfrac{m}{seg} = \dfrac{d - 180.03427m}{t - 3sg}$.

Despejando la distancia en forma de ecuación tenemos.

$$d - 180.03427m = 270.052 \frac{m}{seg}(t - 3sg) \text{ Tenemos } d = 270.052 \frac{m}{seg}(t - 3sg) + 180.03427m$$

$d = 270.052\dfrac{m}{seg} * t - 270.052\dfrac{m}{seg} * 3seg + 180.03427m$ Por lo tanto, la ecuación de la recta es:

$d = 270.052\dfrac{m}{seg} * t - 90.01773\, m$ Éste resultado nos demuestra la ecuación de la recta tangente a la distancia en función del tiempo en el punto. $(3seg., 180.03427m)$.

En la figura 3.4.5. se muestra la recta tangente a cualquier punto de la distancia en función del tiempo.

Actividades de Desarrollo

Ejemplo 2. Se tiene una función exponencial de la forma $d(t) = b\, e^{a\, t}$, definido en un intervalo de tiempo $t \in [c\ seg.,\ d\ seg.]$, tiene un crecimiento definido en bacterias en un cultivo, si la posición es el número de bacterias después de un tiempo t horas, si inicialmente es de 500 unidades y el número de bacterias en un tiempo de 5 horas es de 20,000 unidades.

Preguntas:

a) ¿Cuál es el número de bacterias si $t = 10$ horas?

b) Grafica la posición o el número de bacterias para $t \in [0, 10\ horas]$

c) ¿Cuál es la velocidad o rapidez de crecimiento?

Solución

a) ¿Cuál es el número de bacterias para un tiempo: $t = 10$ horas?

Si la expresión exponencial se escribe: $d(t) = b\, e^{a\, t}$ donde $b = 500$ unidades de bacterias después de 5 tiene 20,000 unidades bacterias, entonces se escribe: $20,000\ unidades = 500\ unidades\ e^{a\ \text{5horas}}$.

Para dar solución debemos despejar al coeficiente a que es una constante. $\dfrac{20,000\ unidades}{500\ unidades} = e^{a\ \text{5horas}}$, Tenemos $\dfrac{20,000}{500} = e^{a\ \text{5horas}}$ entonces $e^{a\ \text{5horas}} = 40$. Por lo tanto $a = \dfrac{\ln(40)}{5horas} = 0.7377(1/\,horas)$, la ecuación exponencial se escribe: $d(t) = 500\, e^{0.7377(1/horas)\, t}$ esta ecuación se debe graficar.

b) Graficar la posición o el número de bacterias para $t \in [0,10\ horas]$

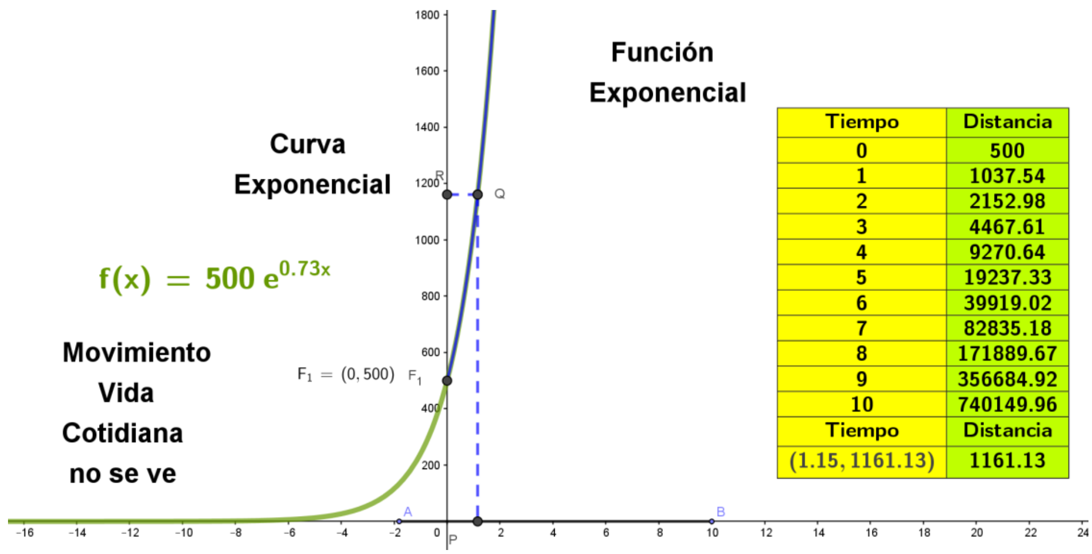


Figura 3.4.6. cultivo-exponencial-posición

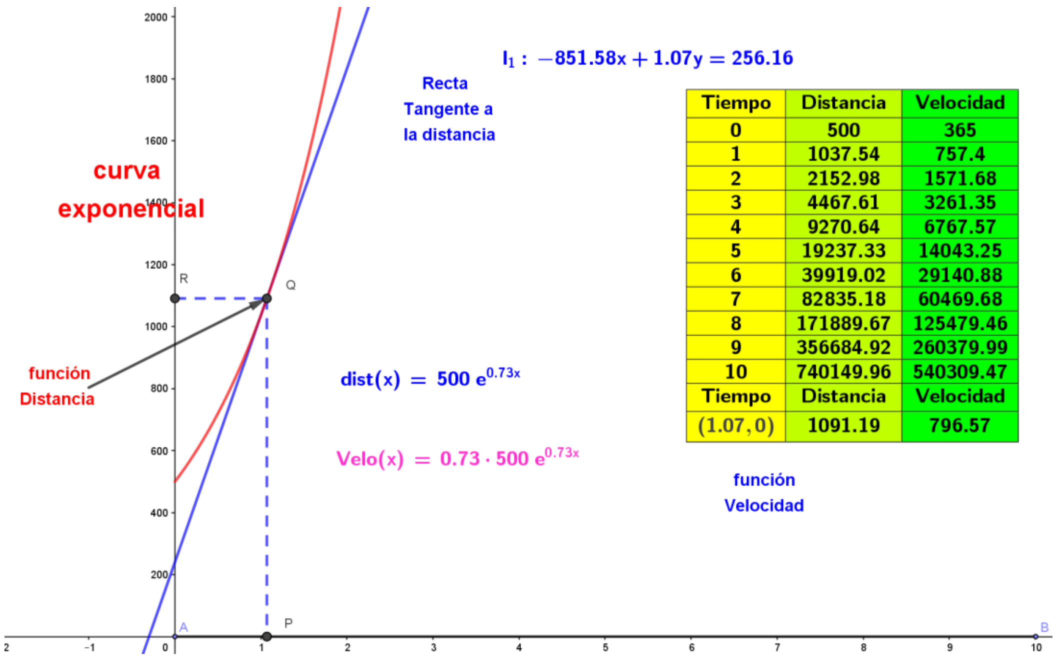
c) ¿Cuál es la velocidad o rapidez de crecimiento?

Aplica el concepto de derivada = velocidad instantánea, definición: $v(t) = \frac{d}{dt} e^U = e^U \frac{d}{dt} U$

Entonces: $v(t) = \frac{d}{dt}\left[500\ e^{0.7377(1/horas)\ t}\right] = 500\ e^{0.7377(1/horas)\ t}\ \frac{d}{dt}\left(0.7377(1/horas * t\right)$

$$v(t) = 500 * 0.7377(1/horas) * e^{0.7377(1/horas)\ t} * \frac{d}{dt} t$$

$v(t) = 368.85(1/horas) * e^{0.7377(1/horas)\ t}$, este concepto es válido para cualquier exponente donde esté definido. Por lo tanto, la velocidad instantánea es: $v(t) = 368.85(1/horas) * e^{0.7377(1/horas)\ t}$, grafica en tu cuaderno de trabajo o apoyándote con GeoGebra, visualizarás el movimiento del objeto velocidad instantánea.



Tiempo	Distancia	Velocidad
0	500	365
1	1037.54	757.4
2	2152.98	1571.68
3	4467.61	3261.35
4	9270.64	6767.57
5	19237.33	14043.25
6	39919.02	29140.88
7	82835.18	60469.68
8	171889.67	125479.46
9	356684.92	260379.99
10	740149.96	540309.47
Tiempo	Distancia	Velocidad
(1.07, 0)	1091.19	796.57

Figura 3.4.7. cultivo - exponencial-velocidad.ggb

Ejercicio: Determina la ecuación de la recta para $t = 8\ seg.$ en el ejemplo 2.

Actividades de cierre

1. Un estudiante se mueve en línea recta con una trayectoria definida de distancia en función del tiempo $d(t) = 0.2\ e^{0.2t}$ definidos en $t \in [0,\ 14seg.]$

Realiza las siguientes actividades:

a) Grafica la función distancia $d(t) = 2\ e^{1.5\,t}$ definida $t \in [0,\ 5eg.]$

b) Determina la velocidad instantánea en los tiempos $t \in [0,\ 5eg.]$

y grafica la velocidad instantánea = derivada

c) Halla la recta tangente que pasa por el punto $t = 3\ seg.$

d) Describe el comportamiento físico del estudiante que se mueve en línea recta.

e) Realiza una comparación de los datos con la pandemia existente.

f) Visualiza y que concluyes de la variación de los coeficientes.

○

Ejercicios Adicionales

1. Una población de bacterias crece de acuerdo la formula $B(t) = c\,e^{k\,t}$ donde c y k son constantes y $B(t)$ representa el número de bacterias en función del tiempo. En el instante $t = 0$ hay 10^6 bacterias.

   ¿Cuánto tiempo habrá 10^7 bacterias, si en 12 minutos hay $2x10^6$ bacterias?

2. Se tiene una muestra de estudiantes del CETis No. 132 cuyo peso fueron registrados, si la ecuación que cumple la densidad de probabilidad está definida por distribución de pesos es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}$$

   Si $\sigma = 3.23$, Desviación estándar

   $\bar{x} = 1.6836\ m$, Media aritmética

   $f(x) =$ Función de densidad de probabilidad

   $\pi = 3.14159265359$ Numero irracional

a) Grafica la función de densidad de probabilidad para una muestra

b) ¿Cuál es la derivada de $f(x)$ o la velocidad de crecimiento?

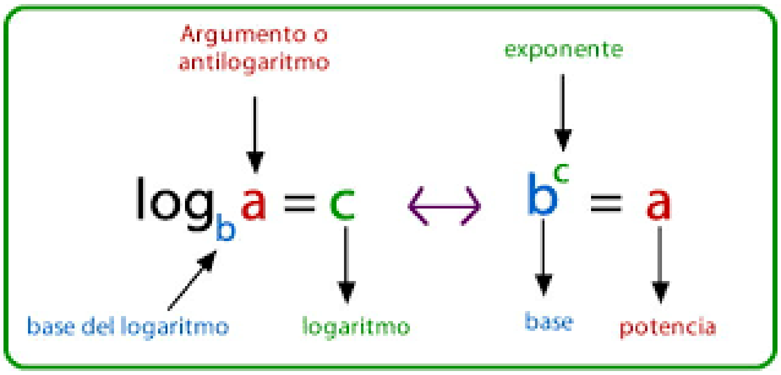
c) Datos registrados

N° de datos	1	2	3		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Estu. m	1.65	1.65	1.71		1.81	1.72	1.7	1.76	1.67	1.79	1.67	1.64	1.66	1.64	1.7	1.62	1.74	1.66	1,66	1.69	1.6	1.62	1.68

3.4.2 Derivación de funciones logarítmicas

Introducción

Definición de logaritmo: El logaritmo de un número real positivo en una base determinada es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número.



Ejemplo:

$$log_2 4 = 2 \implies 2^2 = 4$$

Tipos de logaritmos: Los logaritmos pueden estar en diferentes valores de base, los más usados en las matemáticas son dos tipos, **los logaritmos en base 10 y los logaritmos naturales**, vamos a definir brevemente cada uno de los logaritmos para entenderlo mejor, pero antes vamos a observar la gráfica de la función e^x y la función $ln\, x$, dichas funciones son crecientes y continuas en sus respectivos dominios, tal como se ilustra en la imagen.

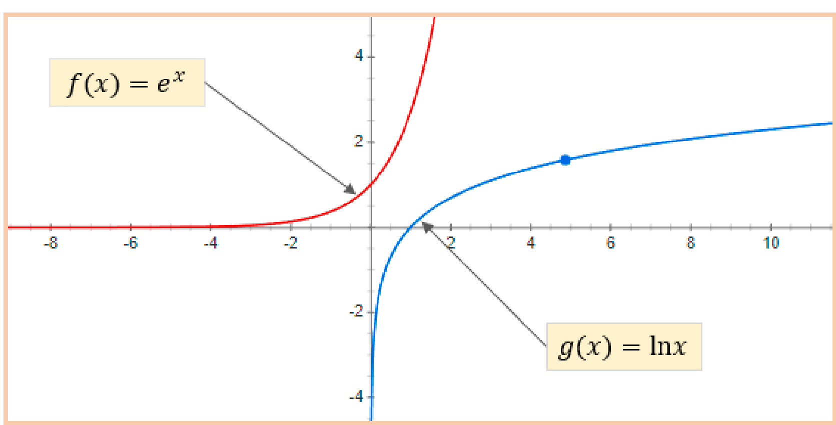


Figura 3.4.9. Exponencial – Logaritmo natural

Logaritmos en base 10: Los logaritmos en base 10 son logaritmos también llamados *logaritmos vulgares* o *logaritmos decimales*, están representados por el símbolo $\log$ y por lo general no se le coloca la base, pues se entiende que está en base diez (10).

$$f(x) = log\ (x)$$

Logaritmos Naturales o Neperiano: Estos logaritmos están representados simbólicamente como $\ln$ y su base es el número e cuyo valor irracional es de 2.718281828…

$$f(x) = ln\ (x)$$

Propiedades de los logaritmos naturales:

$$ln(1) = 0$$

$$ln(e) = 1$$

$$ln(e^x) = x$$

$$e^{ln(x)} = e$$

Otro tipo de logaritmos adicionales a los dos anteriores son:

Logaritmo binario: Asimismo, existe el **logaritmo binario**, una función particular con relevancia en el campo de la Informática donde se trabaja en base 2 para obtener x.

$$f(x) = log_2\ (x)$$

Logaritmo en cualquier base a:

$$f(x) = log_a\ (x)$$

Actividades de Apertura

Leyes de los logaritmos: Puesto que los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes dan lugar a las leyes de los logaritmos.

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. Sea $A, B\ y\ C$, números reales cualesquiera con $A > 0$ y $B > 0$.

LEY	DESCRIPCIÓN
1.- $log_a\ AB = log_a A + log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2.- $log_a \frac{A}{B} = \ log_a A - log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3.- $log_a\ A^C = C * log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.
4.- $log_a \sqrt[C]{A} = \frac{1}{C} log_a A$	El logaritmo de una raíz *n* de un número es la *n* dividiendo al logaritmo del número.

Ejemplo:

1.- $log_2 4 + log_2 8 = log_2(4 * 8)$

$$log_2 32 = \ 5$$

2.- $log_2 80 - log_2 5 = log_2 \frac{80}{5}$

$$log_2 16 = 4$$

3.- $log_2 4^3 = 3log_2 4$

$$3(2) = 6$$

4.- $log_2 \sqrt[3]{64} = \frac{1}{3} log_2 64$

$$\frac{1}{3}(6) = 2$$

Cambio de base

Para algunos propósitos, se encuentra que es útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que se da $log_a x$ y se quiere hallar $log_b x$. Sea.

$$y = log_b x$$

Se escribe esto en forma exponencial y se toma el logaritmo, con base a, de cada lado.

$b^y = x$	Forma exponencial
$log_a b^y = log_a x$	Tome log_a de cada lado
$y\ log_a b = log_a x$	Ley número 3 de logaritmos
$y = \frac{log_a x}{log_a b}$	Divida entre $log_a b$

Ejemplo: Evaluar logaritmos con la fórmula de cambio de base

Use la fórmula de cambio de base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, correcto hasta cinco decimales.

$a)\ log_3 12$ $\qquad$ $b)\ log_5 20$

Solución

$a)$ Se usa la fórmula de cambio de base con $b = 3$ y $a = 10$:

$$log_3 12 = \frac{log_{10} 12}{log_{10} 3} \approx 2.26185$$

$b)$ Se usa la fórmula de cambio de base con $b = 5$ y $a = e$:

$$log_5 20 = \frac{ln\ 20}{ln\ 5} \approx 1.86135$$

Actividades de Desarrollo

Las funciones logarítmicas son consideradas también como funciones transcendentales, las reglas de derivación para esta clase de funciones son:

- $d\frac{(\ln u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$
- $d\frac{(\log_a u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} * \frac{1}{\ln a}$
- $d\frac{(\log u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} * \log e$

I.- Encuentra los ejercicios de las siguientes derivadas

a) $f(x) = \ln(5x^3)$

Solución aplicar la regla de derivación:

$$d\frac{(\ln u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

$$f'(x) = \frac{d\frac{(5x^3)}{dx}}{5x^3}$$

$f'(x) = \frac{15x^2}{5x^3}$ → Al simplificar: $\boxed{f'(x) = \frac{5}{x}}$

b) $f(x) = \log\ (2x^4 - 3)$

Solución aplicar la regla de derivación:

$$d\frac{(\log u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} * \log e$$

$f'(x) = \frac{d\frac{(2x^4-3)}{dx}}{2x^4-3} \log e$ → Al resolver: $\boxed{f'(x) = \frac{8x^3}{2x^4-3} \log e}$

II.- Nuestra siguiente actividad consiste en observar el siguiente video de Khan Academy, para la derivación de logaritmos con base arbitraria.

https://es.khanacademy.org/math/new-calculus/taking-derivatives-calc/logarithmic-functions-differentiation-calc/v/derivative-of-log-with-arbitrary-base

c) $f(x) = log_5(\sqrt{4x})$

Solución la regla de la derivación:

$$d\frac{(log_a u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} * \frac{1}{ln\, a}$$

$$f'(x) = \frac{d\frac{\sqrt{4x}}{dx}}{\sqrt{4x}}\left(\frac{1}{ln\, 5}\right)$$

Aplicar la derivación de la raíz cuadrada

$$d\frac{\sqrt{u}}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{2\sqrt{4x}}}{\sqrt{4x}}\left(\frac{1}{ln\, 5}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{\sqrt{4x}}}{\sqrt{4x}}\left(\frac{1}{ln\, 5}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x}\sqrt{4x}}\left(\frac{1}{ln\, 5}\right)$$

$f'(x) = \frac{2}{4x}\left(\frac{1}{ln\, 5}\right)$ → Al simplificar: $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x\, ln\, 5}}$

III.- Analiza el siguiente video.

https://es.khanacademy.org/math/new-calculus/taking-derivatives-calc/logarithmic-functions-differentiation-calc/v/derivative-log-properties

Ejemplo 1: Efectuemos la siguiente derivada aplicando la ley de logaritmos.

$$f(x) = ln\left((5x-8)(x^2+4)^3\right)$$

Aplicar la ley de logaritmos No. 1

$$f(x) = ln\ (5x-8) + ln(x^2+4)^3$$

En este logaritmo usar la ley de logaritmos No. 3

$$f(x) = ln\ (5x-8) + 3ln(x^2+4)$$

Desarrollar la derivada de logaritmo natural.

$$f'(x) = \frac{d\frac{(5x-8)}{dx}}{5x-8} + (3)\frac{d\frac{(x^2+4)}{dx}}{x^2+4}$$

$$f'(x) = \frac{5}{5x-8} + (3)\frac{2x}{x^2+4}$$

$$f'(x) = \frac{5}{5x-8} + \frac{6x}{x^2+4}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{35x^2-48x+20}{(5x-8)(x^2+4)}}$$

Ejemplo 2: Realiza la derivada de la siguiente función en un punto en específico.

$$f(x) = ln\left(\frac{2+x^2}{2-x^2}\right) \quad x = 1$$

Usar la ley de logaritmos No. 2

$$f(x) = ln(2+x^2) - ln(2-x^2)$$

Desarrollar la derivada de logaritmo natural.

$$f'(x) = \frac{d\frac{(2+x^2)}{dx}}{2+x^2} - \frac{d\frac{(2-x^2)}{dx}}{2-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2+x^2} - \frac{-2x}{2-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2+x^2} + \frac{2x}{2-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x-2x^3-(-4x-2x^3)}{(2+x^2)(2-x^2)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{8x}{4-x^4}}$$

El punto especifico $x = 1$

$f'(x) = \frac{8x}{4-x^4}$

$f'(x) = \frac{8(1)}{4-(1)^4}$

$f'(x) = \frac{8}{4-1}$ Resultado $f'(x) = \frac{8}{3}$

Ejercicio: Determina la derivada de las siguientes funciones logaritmos.

a) $y = log\ (4x - 5)$

b) $y = log\ \left(\frac{2}{x^3}\right)$

c) $f(x) = log_5\ (7x^4 + 1)$

d) $f(x) = log_7\ (x^a)$

e) $f(x) = ln\ (5x^3)$

f) $y = ln\, x\ (x^2 - 3)$

g) $y = ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)$

h) $y = x^3\ ln(2x + 2)$

i) $y = e^x\ log(x^3)$

j) $y = log\ \ (5x + 1) \qquad x = 2$

Actividades de cierre

El modelo de Count es una formula empírica que sirve para predecir la estatura de un niño en edad preescolar. Si *h* denota la estatura (en cm) y *x* la edad (en años), entonces:

$$h = 70.228 + 5.104x + 9.222\, ln\, x$$

Para $\frac{1}{4} \leq x \leq 6\ años.$

a) Pronosticar la altura y la rapidez o tasa de crecimiento de un niño típico de dos años

b) ¿A qué edad se alcanza la mayor rapidez de crecimiento?

Actividades de contexto o Transversales

La leyenda de Sissa: El origen del ajedrez.

Hace mucho tiempo, en uno de los reinos de la antigua India, en lo que hoy sería Pakistán o Afganistán, vivía un desdichado rey. Este rey, rico y poderoso, había perdido toda su felicidad al perder un hijo en la guerra.

Melancólico y devastado por la muerte de su adorado hijo, el rey se abandonó a sí mismo, y descuidaba su reino y a los que en él vivían. Tal era el estado en el que estaba sumido el rey, que sus más cercanos consejeros y ministros se esforzaban por animarlo: invitaban a cantantes, músicos o bailarines para que trataran de distraerlo y que con ello el rey volviera a ocuparse de su reino. Y sin embargo, él no podía dejar de pensar que la victoria en la guerra había significado la pérdida de su hijo. El rey era tremendamente infeliz.

Preocupado por el estado del reino a consecuencia de la tristeza de su rey, un sabio, Sissa decidió crear un juego que consiguiera devolverle parte de su alegría al rey, además de hacerle comprender sus errores en la guerra.

Tras reflexionar largo tiempo, Sissa, con su juego preparado, decidió presentarse frente a su rey para mostrárselo. Así pues, abrió una caja y aparecieron ante el rey: Un hermoso tablero de madera, con 64 casillas y 32 figuritas también de madera. Tras explicarle a su rey que era un juego de guerra en el que participaban dos personas, y explicarle sus reglas, se pusieron a jugar.

Emocionado por el juego que acababa de descubrir, el rey jugó durante horas y días y semanas contra todos sus ministros, consejeros y todo aquel dispuesto a retarle. Agradecido de que por fin alguien hubiera conseguido distraerlo, le ofreció a Sissa cualquier cosa que este quisiera. Tras mucho insistir, puesto que Sissa se negaba a aceptar sus regalos, el sabio aceptó y le pidió a cambio de su juego lo siguiente:

"*Quiero un grano de trigo en la primera casilla del juego, y 2 en la segunda, y 4 en la tercera y así sucesivamente…*" El rey, extrañado porque alguien con tanta sabiduría, capaz de crear un juego como aquel, le pidiera tan poco, ordenó a sus ayudantes que calcularan el número total de granos de trigo y se los dieran a Sissa.

Tras unas horas calculando, los ayudantes se acercaron y le comunicaron al rey "Su majestad, no hay en el reino cantidad suficiente de trigo para pagar la deuda con el sabio Sissa…" La cantidad de granos de trigo equivalía a:

$$T_{64} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = 2^{64} - 1$$

Es decir, ¡18 446 744 073 709 551 615, granos de trigo!

El rey quedó boquiabierto, ¡jamás podría haber imaginado que lo que el sabio le pedía era imposible de pagar incluso con sus enormes riquezas! No obstante, satisfecho por haber conseguido que el rey volviera a estar feliz y por la lección matemática que le había dado al reino, Sissa renunció al presente.

1. Conociendo esta leyenda un estudiante hace el siguiente cuestionamiento. ¿Si una persona recibió la cantidad de 65,535 granos de trigo, a cuantas casillas del tablero corresponden?

La tabla muestra las temperaturas (°F) de ebullición del agua a ciertas presiones P (lb/in^2).

P	5	10	14.696 (1 atm)	20	30	40	60	80	100
T	161.92	193.48	212	228.07	250.20	266.96	292.38	311.91	328.06

Bajo el siguiente modelo que ajusta los datos es: $T = 87.97 + 34.96\, ln\, P + 7.91\sqrt{P}$, determina:

a) Representa los datos y modelo gráficamente.

b) Encuentra el ritmo o velocidad de cambio de T respecto de P cuando $P = 10\frac{lb}{in^2}$ y $P = 70\frac{lb}{in^2}$.

Grafica la velocidad de cambio.

Ejercicios Adicionales

Determina la derivada de las siguientes funciones logaritmos.

a) $f(x) = log\ (x^2 - 2)$

b) $f(x) = log(3x + 5)^3$

c) $W = log_2 \frac{x^2}{x-1}$

d) $k = ln\ (4 - x)$

e) $y = ln\ (4x^3 - 9x^2 + x - 7)$

f) $f(y) = ln\ (3y + b)^2$

g) $f(x) = ln\left(\sqrt{1 + \mathrm{x}^2}\right) \quad x = 2$

h) $y = \sqrt{x}\, ln(x) \quad x = 4$

3.4.3. Derivación de funciones Trigonométricas

Actividades de Apertura

Las oscilaciones, forman parte de la vida, de la experiencia y del vocabulario ordinario. Los movimientos de vaivén, una forma de oscilación básica, son bastante habituales y fáciles de observar en la naturaleza, por ejemplo: en el movimiento de un columpio, el péndulo de un reloj o la forma rizada de la superficie del agua como consecuencia de las ondas que se generan en ella.

En matemáticas, este tipo de trayectorias se representa mediante las funciones trigonométricas como seno, coseno y tangente. En ésta unidad analizaremos las características de éste tipo de funciones. Observa por ejemplo como se obtiene la gráfica de la función seno a partir de

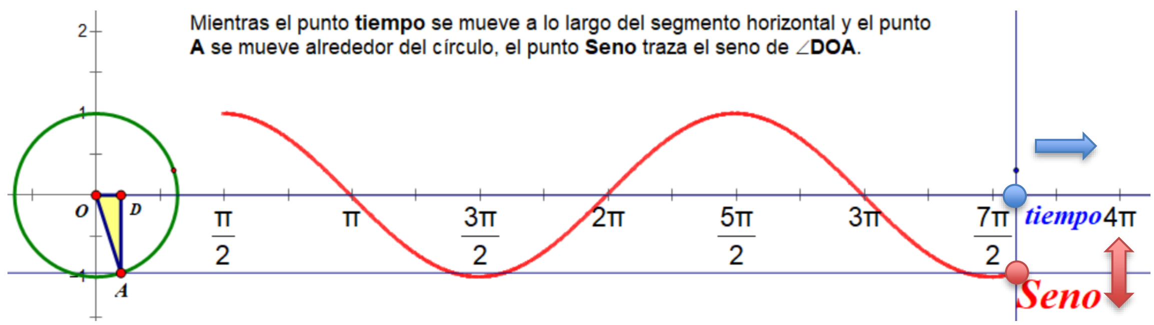


Figura 3.4.10. Trazado de la función Seno

Figura 3.4.11. Aplicaciones cotidianas

Con respecto a las trayectorias descritas por las funciones trigonométricas, en Cálculo se analizan problemas como: ¿Cuál es la rapidez o la velocidad instantánea en un punto definido de la oscilación?

Para tal fin se aplica el modelo matemático de la derivada del seno y coseno de un ángulo arbitrario α.

La derivada de la función seno es igual al producto del coseno del ángulo por la derivada del ángulo, $\frac{d}{dx}(Sen\ U) = Cos\ U\ \frac{dU}{dx}$

Ejemplo: La derivada del Seno de un ángulo x se calcula:

$$\frac{d}{dx}(Sen\ x) = Cos\ x\ \frac{dx}{dx} = Cos\ x$$

¿Cómo se interpreta gráficamente? Recuerda que la derivada es el valor de la pendiente de una recta tangente a un punto de la curva. Observa que, si trazas una recta tangente por cualquier punto de la función seno, el valor de su pendiente será igual al valor de la función Coseno. Los puntos donde se evidencia más ésta correspondencia se observan en la figura 3.4.12.

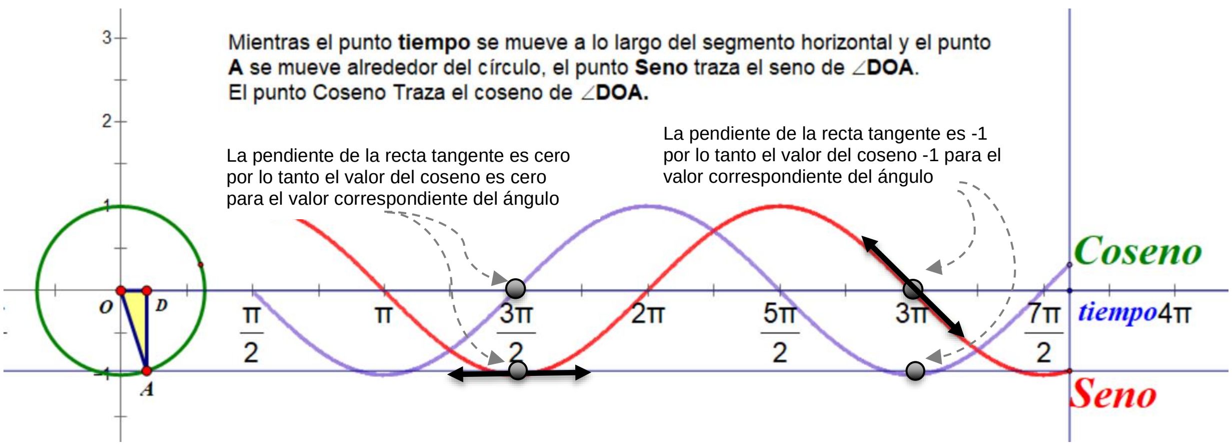


Figura 3.4.12. Función Seno y su derivada

La derivada de una función coseno es igual al producto del seno de la función por la derivada de la función:

$$\frac{d}{dx}(Cos\ U) = -Sen\ U\ \frac{dU}{dx}$$

¿Cómo se interpreta gráficamente? Como ambas funciones están relacionadas también puede serte de utilidad las gráficas en la figura 3.4.12.

Ejemplo I: Un objeto oscila bajo una función sinusoidal descrito en la forma $d(t) = sen(2t)$

Realiza las siguientes actividades:

a. Grafica la función $d(t) = sen(2t)$ definida $t \in [0,\ 45°.]$
b. Determina la velocidad instantánea "derivada" en los tiempos $t \in [0,\ 45°.]$ y grafica la velocidad instantánea = derivada
c. Halla la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto donde $t = 15\ seg.$

Solución:

a. Grafica la función $d(t) = sen(2t) \quad t \in [0,\ 45°.]$

La fórmula para derivar la función seno es igual al producto del coseno del ángulo por la derivada del ángulo U,

$\frac{d}{dx}(Sen\ U) = Cos\ U\ \frac{dU}{dx}$ Si $U = 2t$

Entonces tenemos:

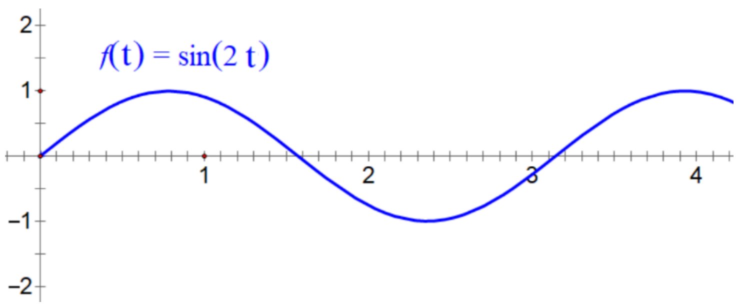
$$v(t) = \frac{d}{dx}(Sen\ 2t) = Cos\ 2t\ \frac{d}{dx}(2t) = 2\ Cos\ 2t$$

Por lo tanto, la velocidad es: $v(t) = 2\ \cos\ 2t$ definido en $t \in [0,\ 45°.]$

tiempo	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
d(t)=Sen 2t	0	0.173	0.342	0.5	0.642	0.766	0.866	0.939	0.984	1
V(t)= 2 Cos 2t	2	1.969	1.8794	1.732	1.532	1.285	1	0.684	0.347	0

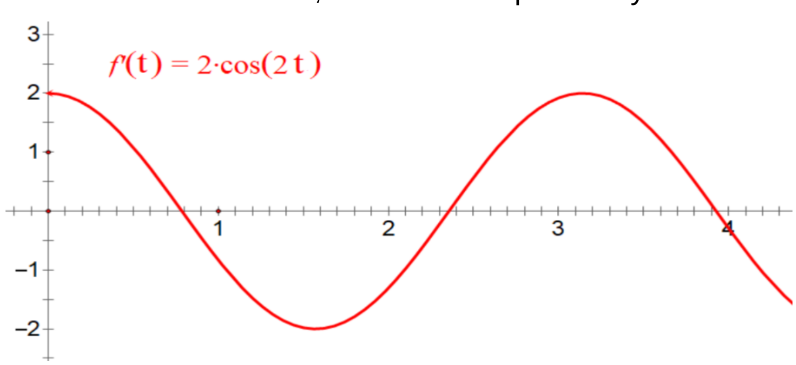
Tabla 3.4.3. Valores de ls función Sen 2t y de su derivada

Observa cómo se comporta una oscilación



2) La velocidad instantánea o “derivada”

En la tabla 3.4.3, se muestra la posición y la velocidad en cualquier instante



c) Cuando $t = 15°$, $2t = 30°$

Convirtiendo a radianes: $30° \left(\frac{\pi}{180°}\right) = \frac{\pi}{6} rad = 0.5236 \text{ rad}$

Para $2t = 30°$, El valor de la función y de la derivada son:

$$f(0.5236\, rad) = 0.8666$$

$$f'(0.5236\, rad) = 1$$

Es decir, el valor de la pendiente de la recta tangente al punto de la función $A(0.523\, rad, 0.8666)$ es 1

Recordarás que la ecuación de la recta es $y = mx + b$ donde su pendiente m se calcula:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

sustituyendo

$$1 = \frac{y - 0.8666}{x - 0.523}$$

Despejando y:

$$y - 0.8666 = x - 0.523$$

$$y = x - 0.523 + 0.8666$$

$$y = x + 3425$$

Se obtiene la ecuación de la recta tangente.

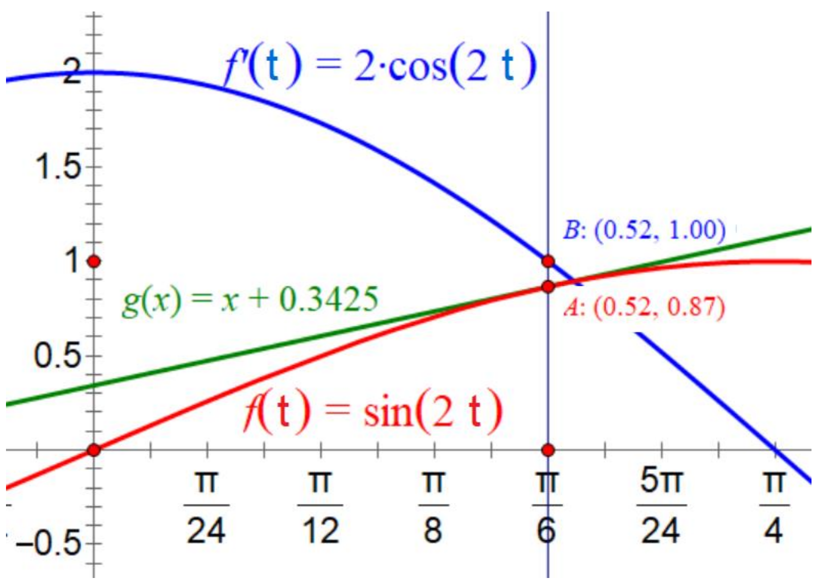


Figura 3.4.14. Ecuación de la recta tangente

Actividades de Desarrollo

1. Un objeto oscila bajo una función sinusoidal descrito de la forma $d(t) = 0.5\ Sen3t$

a) Grafica la función $d(t) = 0.5\ Sen3t$ definida $t \in [0,\ 45°.]$

b) Determina la velocidad instantánea "derivada" en los tiempos $t \in [0,\ 45°.]$ y grafica la velocidad instantánea=derivada

c) Halla la recta tangente que pasa por el punto $t = 15\ seg.$

t	$d(t)$	$v(t)$
0		
5		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
45		

2. Para cada una de las siguientes formulas, grafica la función y su derivada. Demuestra que cada igualdad se cumple para el valor del ángulo dado en cada caso.

a) $\frac{d}{dx}(Tg\ U) = -Sec^2\ U\ \frac{dU}{dx}$ $\qquad U = 45°$

b) $\frac{d}{dx}(Ctg\ U) = -Csc^2\ U\ \frac{dU}{dx}$ $\qquad U = 15°$

c) $\frac{d}{dx}(Sec\ U) = Sec\ Tg\ U\ \frac{dU}{dx}$ $\qquad U = 30°$

d) $\frac{d}{dx}(Csc\ U) = -Csc\ U\ Ctg\ U\frac{dU}{dx}$ $\qquad U = 60°$

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = Sen\ \frac{x}{3}$

b) $f(y) = Cos\ 5y^3$

c) $g(t) = Tg\ 7\sqrt{t^3}$

d) $H(z) = Ctg\ (6 - z^4)$

e) $k(w) = Sec\ \frac{\pi}{10}w$

f) $P(r) = Csc\ \frac{2r^7}{9}$

3.4.4. Derivación de funciones Trigonométricas inversas

Introducción

La trigonometría es el campo de las matemáticas que tiene como objeto de estudio a los triángulos y la relación entre sus lados y los ángulos que lo forman, así como también las funciones que surgen de dichas relaciones (funciones trigonométricas).

La historia de la trigonometría y en particular las funciones trigonométricas pueden abarcar un período de alrededor de 400 años. Esta disciplina como la conocemos ahora no es el resultado de un sólo grupo de individuos, esto fue un largo proceso en el participaron grandes civilizaciones. Las culturas como la egipcia y la babilónica tuvieron conocimientos previos sobre temas que involucraban proporciones que relacionaban las magnitudes de triángulos rectángulos, pero carecían del concepto de medida de un ángulo. Aunque los trabajos de Euclides y Arquímedes no incluyen trigonometría, contienen problemas geométricos que son enunciados por medio de leyes trigonométricas. Las primeras tablas trigonométricas fueron aparentemente recopiladas por Hiparco de Nicea (180-125 a.C), quien es conocido como el padre de la trigonometría.

Cabe recordar que una función en una relación entre dos magnitudes o variable numérica, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y. La variable x se denomina variable independiente, y la variable y, variable dependiente.

En el contenido anterior aprendimos que una función trigonométrica se define como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo, asociado a sus ángulos.

Existen seis funciones trigonométricas básicas:

Función	Abreviatura
seno	sen
coseno	cos
tangente	tan, tg
cotangente	cot
secante	sec
Cosecante	csc

Actividades de Apertura

Iniciaremos recordando lo siguiente:

Si una función es continua y estrictamente creciente (o decreciente) en un intervalo, entonces posee función inversa la cual también es continua y estrictamente creciente (o decreciente).

Las funciones trigonométricas son periódicas por lo que la correspondencia entre la variable independiente y la variable dependiente no es uno a uno.

Sin embargo, se tiene que la inversa de una función trigonométrica no es una función, es una relación; además si se restringe el dominio de una función trigonométrica se establece una relación biunívoca (a cada elemento del dominio le corresponde un solo elemento del rango y a cada elemento del rango le corresponde un solo elemento del dominio. Si una recta horizontal corta a la gráfica en un solo punto, la función es biunívoca).

Consideremos la gráfica de la función seno que no es biunívoca

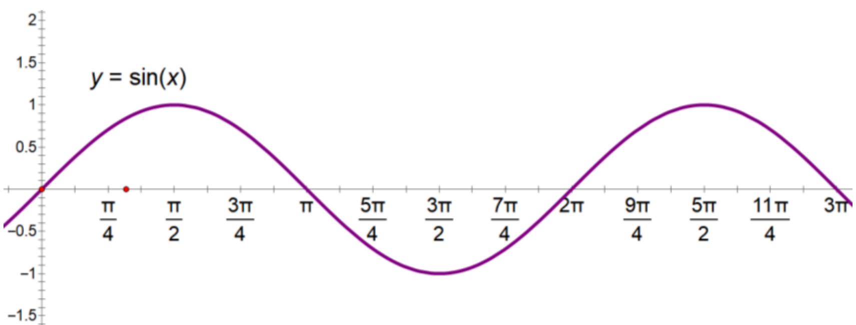


Figura 3.4.15. Función seno

Si trazamos una línea horizontal para probar si realmente es una función, encontraremos lo siguiente:

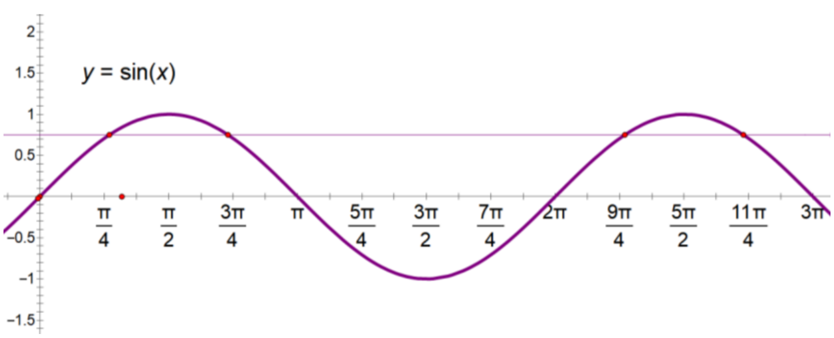


Figura 3.4.16. Función Coseno

En la figura 3.4.19. observamos que la línea roja toca dos puntos de la gráfica por lo que podemos afirmar que no cumple la propiedad de ser una función biunívoca como se describió en la introducción de este contenido. Lo mismo sucede con las funciones coseno y tangente, como se demuestra en las siguientes figuras:

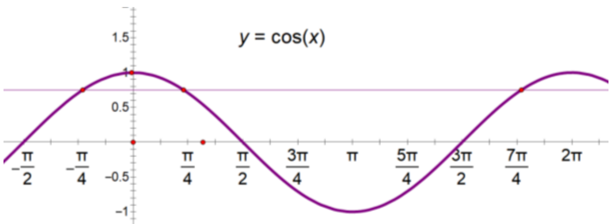


Figura 3.4.17. Función coseno

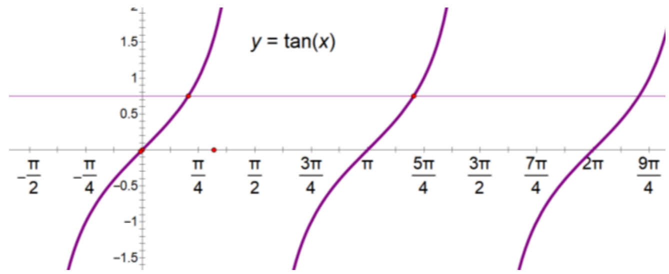


Figura 3.4.18. Función tangente

La inversa de la función se conoce como la función seno inverso (o arcoseno) y se representa con el símbolo sen^{-1} (o arc sen).

Usualmente se toma el intervalo $[-\frac{\pi}{1},\frac{\pi}{2}]$. Luego se define la función como:

F= {(x, y) tal que y=sen x, con x $[-\frac{\pi}{1},\frac{\pi}{2}]$. y [-1,1}

La función F así definida es continua y estrictamente creciente en el intervalo $[-\frac{\pi}{1},\frac{\pi}{2}]$., por lo que existe una única función, definida en el intervalo [-1,1], llamad función seno inverso. Esta función, denotada como arc sen, se define como sigue:

f: [-1,1], $\longrightarrow$ $[-\frac{\pi}{1},\frac{\pi}{2}]$. *f*(x)=arc sen *x*

La representación gráfica de la función seno y arcoseno es la siguiente:

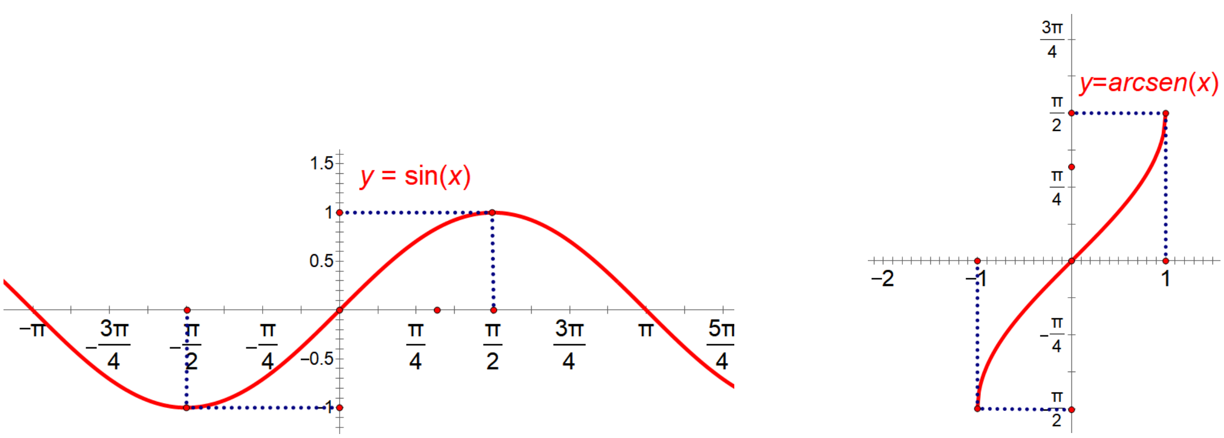


Figura 3.4.19. función seno y arcoseno

Actividades de Desarrollo

Una vez visualizado las figuras de las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente y comprobado en cada una de ellas que no cumplen con el requisito de una función biunívoca, tendremos que delimitar una fracción de cada una de ellas para nuestro estudio y comprobaremos que reúnen las propiedades de ser una función, iniciamos con la derivación de estas funciones.

Derivada de la función seno: Si *u* es una función diferenciable de *x*, su fórmula es:

$$\frac{d}{dx}(\,sen^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}u$$

Ejemplo 1: Si $y = sen^{-1}x^2$, aplicando la formula tendríamos lo siguiente:

$u = x^2 \qquad du = 2x$

$\frac{d}{dx}(sen^{-1}x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,(2x) = \frac{(1)(2x)}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Ejemplo 2: Si $y = sen^{-1}(2x-3)$, tenemos

$u = (2x-3) \quad du = 2$

$$y' = \left(sen^{-1}(2x-3)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{1}{\sqrt{(1-(4x^2-12x+9)}}(2)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2+12x-9}} = \frac{2}{\sqrt{12x-4x^2-8}}$$

Si dividimos al numerador y denominador entre 4 obtenemos $= \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = sen^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $y = arc\ sen\ (3x)$

c) $y = sen^{-1}(x-1)$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - sen^{1}(x-a)$

e) $y = sen^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)$

f) $y = sen^{-1}(2x^2+3)$

Observa y analiza el video:

https://youtu.be/hUuG-7_PcdY

Derivada de la función coseno

El argumento es similar al de la función seno, se establece en el mismo rango de su dominio e imagen. La figura 5 representa las funciones seno y sen^{-1} (o arc cos).

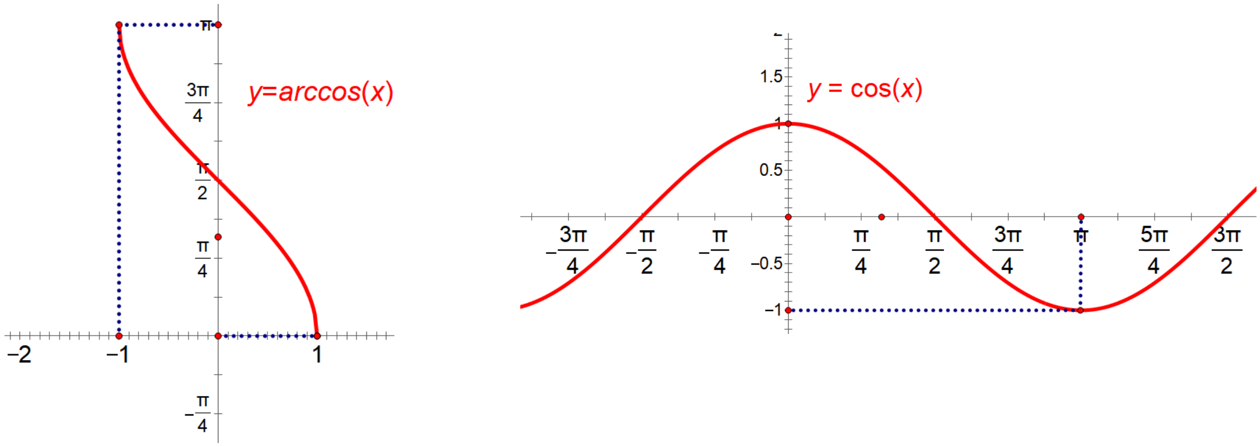


Figura 3.4.20. función coseno y arcocoseno

Si *u* es una función diferenciable de *x*, su fórmula es:

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}u$$

Ejemplo 3: Si $y = arc\cos\ (3x)$, entonces

$u = 3x \qquad du = 3$

$$y' = arc\cos(3x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\frac{d}{dx}(3x) = -\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}(3) = -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

Ejemplo 4: $\mathrm{y} = \cos^{-1}(\mathrm{x}^2)$

$u = x^2 \qquad du = 2x$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\frac{d}{dx}(x^2) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(2x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = cos^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)$ b) $y = cos^{-1}(sen\ x)$ c) $y = 2cos^{-1}(\sqrt{x})$

d) $y = arc\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ e) $y = arc\cos(e^x)$

Observa y analiza el video:

https://youtu.be/2o6Z9CQaa_U

Derivada de la función tangente inversa

Para la función tangente inversa el dominio de la derivada es el conjunto de todos los números reales. En la figura 3.4.24 se muestra la función tangente y la función arcotangente (arctan).

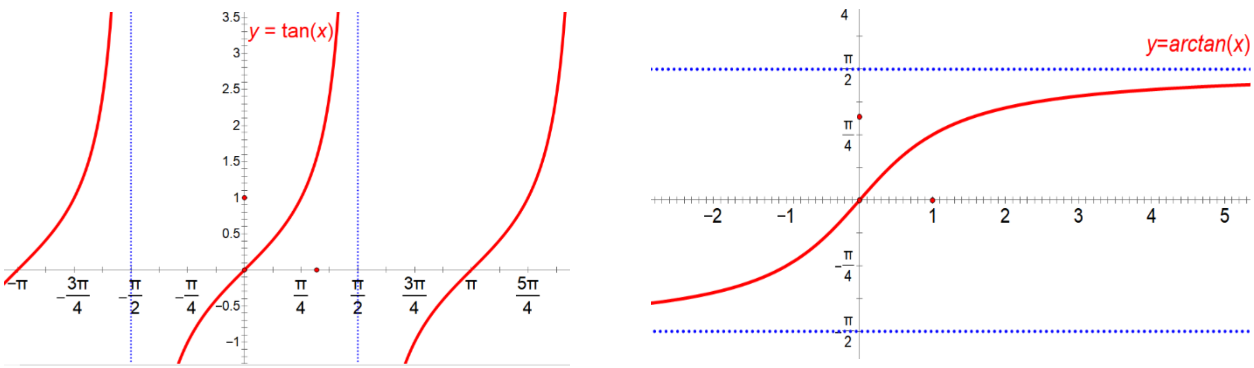


Figura 3.4.21. Función tangente y arcotangente

Si *u* es una función diferenciable de *x*, entonces:

$$\frac{d}{dx}(tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo 5: $Si\ y = tan^{-1}(5x^3)$

$$u = 5x^3 \qquad du = 15x^2$$

$$y' = \frac{1}{1+(5x^3)^2}\frac{d}{dx}(5x^3) = \frac{1}{1+25x^6}(15x^2) = \frac{15x^2}{1+25x^6}$$

Ejemplo 6: $Si\ y = arc\ tan\ (\sqrt{x})$

$$u = \sqrt{x} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{(2\sqrt{x})(1+x)}$$

Ejemplo 7: $Si\ y = arc\ tan\ (ln\ x)$

$$u = ln \qquad du = \frac{1}{x}$$

$$y' = arc\tan(\ln x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{1+\ ln^2x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x(1+ln^2x)}$$

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $g(x) = tan^{-1}2x$ b) $F(x) = \ln(tan^{-1}x^2)$ c) $y = tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)$

d) $y = tan^{-1}(3x^2)$ e) $y = tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)$

Derivada de la función cotangente inversa

Para definir la función inversa de la función cotangente, vamos a restringir el dominio de ésta en el intervalo [0, π], en el que es continua y estrictamente decreciente, por lo que posee función inversa.

La figura 3.4.25. representa la gráfica de la función cotangente y la función arcocotangente.

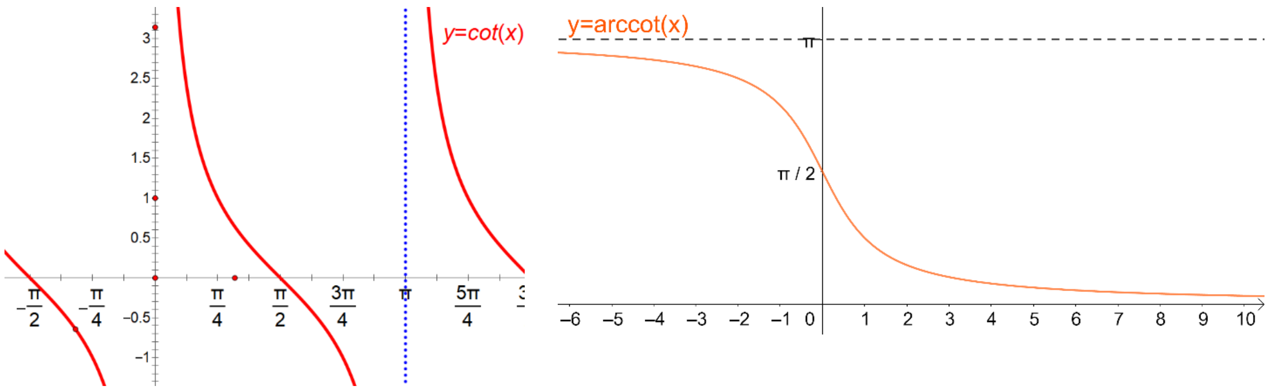


Figura 3.4.22. función cotangente y arcocotangente

Si u es una función diferenciable de x, entonces:

$$\frac{d}{dx}(cot^{-1}u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo 8: $Si\ y = arc\ cot\ (7\sqrt{x})$ entonces

$$u = 7\sqrt{x} \qquad du = \frac{7}{2\sqrt{x}}$$

$$y = arc\cot(7\sqrt{x}) = -\frac{1}{1+(7\sqrt{x})^2}\frac{d}{dx}(7\sqrt{x}) = -\frac{1}{1+49x}\left(\frac{7}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{7}{2\sqrt{x}(1+49x)}$$

Ejemplo 9: $Si\ y = arc\ cot\ (e^x)$ entonces

$$u = e^x \qquad du = e^x$$

$$y = arc\cot(e^x) = -\frac{1}{1+(e^x)^2}\frac{d}{dx}(e^x) = -\frac{1}{1+e^{x^2}}(e^x) = -\frac{e^x}{1+e^{x^2}}$$

4. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = cot^{-1}(e^y)$ b) $y = cot^{-1}(8\sqrt{x})$ c) $y = cot^{-1}(3x^4)$

d) $y = arc\cot(e^{3x})$ e) $y = arc\cot(\ln x)$

Derivada de la función secante inversa

Vamos a elegir dominio de la función secante el intervalo *I*= $[-\pi, \frac{-\pi}{2}]$ u $[o, \frac{\pi}{2}]$, ya que en el intervalo *I* la función secante es biunívoca y la derivada de la función inversa puede expresarse por medio de una sola fórmula.

La representación gráfica de la función secante y arco secantes en el intervalo señalado son las siguientes:

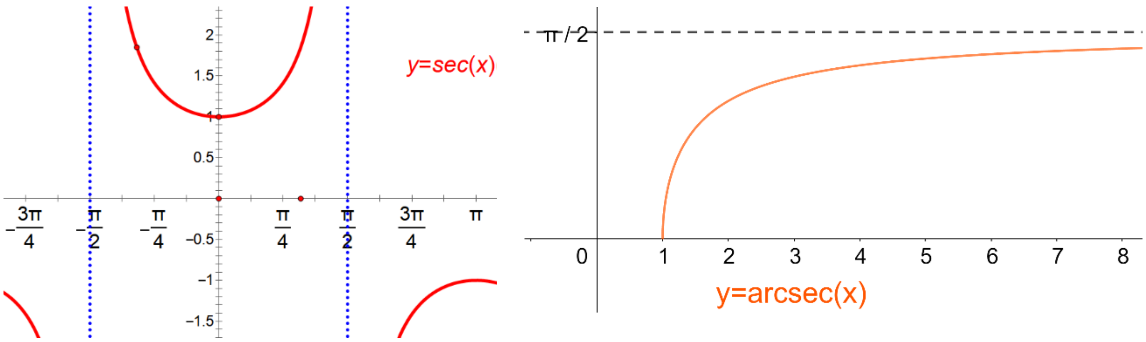


Figura 3.4.23. Función secante y arcosecante

Si *u* es una función diferenciable de *x*, entonces:

$$\frac{d}{dx}(sec^{-1}u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo 10: $Si\ y = arc\ sec\ (2x)$ entonces:

$$u = 2x \quad du = 2$$

$$y' = arc\sec(2x) = \frac{1}{|2x|\sqrt{(2x)^2-1}}\frac{d}{dx}(2x) = \frac{1}{|2|\sqrt{4x^2-1}}(2) = \frac{2}{|2|\sqrt{4x^2-1}}$$

Ejemplo 11: $Si\ y = arc\ sec\ (3x+2)$ entonces:

$$u = 3x+2 \quad du = 3$$

$$y' = arc\ sec\ (3x+2) = \frac{1}{|3x+2|\sqrt{(3x+2)^2-1}}\frac{d}{dx}(3x+2) = \frac{1}{|3x+2|\sqrt{(9x^2+12x+4)-1}}(3) = \frac{3}{|3x+2|\sqrt{9x^2+12x-3}}$$

5. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $g(t) = sec^{-1}(5t)$

b) $y = arc\sec\left(\sqrt{x}\right)$

c) $y = arc\sec\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $y = arc\sec\left(\frac{2}{x}\right)$

e) $y = sec^{-1}(5x^2)$

Derivada de la función cosecante

Tomamos como dominio de la función cosecante el intervalo *I*= $[-\pi, \frac{-\pi}{2}]$ u $[o, \frac{\pi}{2}]$, en el que la función es biunívoca.

La representación gráfica de la función secante y arco cosecantes en el intervalo señalado son las siguientes:

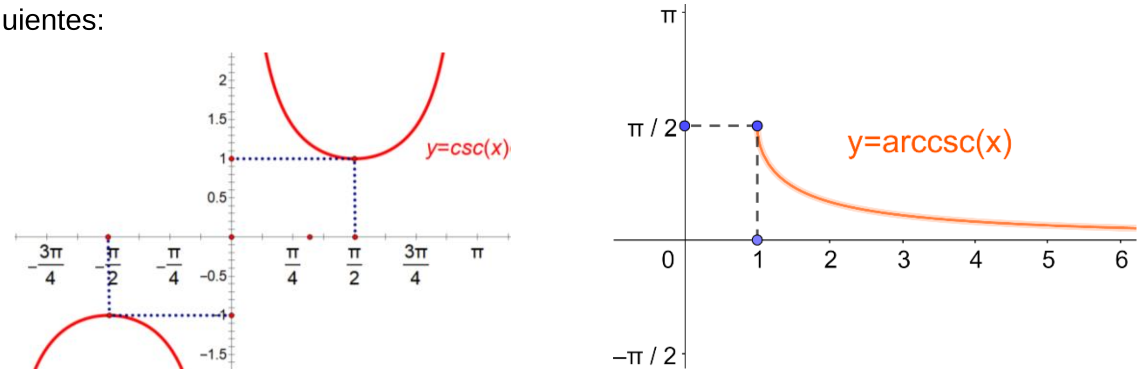


Figura 3.4.24. función cosecante y arcocosecante

Si u es una función diferenciable de x, entonces:

$$\frac{d}{dx}(csc^{-1}u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo ilustrativo 12. $Si\ y = arc\ csc\ (x^2)$ entonces:

$$u = x^2 \quad du = 2x$$

$$y = arc\ \csc(x^2) = -\frac{1}{|x^2|\sqrt{(x^2)^2-1}}\frac{d}{dx}(x^2) = -\frac{1}{|x^2|\sqrt{x^4-1}}(2x) = -\frac{2x}{|x^2|\sqrt{x^4-1}} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

Ejemplo ilustrativo 13. $Si\ y = arc\ sec\ (\frac{2}{x})$ entonces:

$$u = \frac{2}{x} \qquad du = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = arc\ \csc\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{1}{\left|\frac{2}{x}\right|\sqrt{(\frac{2}{x})^2-1}}\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{1}{\left|\frac{2}{x}\right|\sqrt{\left(\frac{4}{x^2}\right)-1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{(x^2)\left|\frac{2}{x}\right|\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}}$$

6. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $y = arc\ \csc(e^x)$

b) $y = x\ csc^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $y = x\ csc^{-1}(3x)$

d) $y = 2csc^{-1}(x+3)$

e) $y = 9\ csc^{-1}(x)$

Actividades de cierre

Utilizando las fórmulas para derivar funciones trigonométricas inversas, realiza los cálculos para obtener la derivada de las siguientes funciones en tu cuaderno:

1. $f(x) = 5\, arc\ sen\ (x) =$
2. $f(w) = arc\ sen\ (3w)$=
3. $g(x) = \frac{2}{5} arc\ sen\ (x) =$
4. $R(x) = arc\ sen\ (2x^6)$=
5. $f(x) = arc\ sen(2 - 4x^2 + 3x^4)$=
6. $y = 4\,\text{arccos}(x) =$
7. $R = arc\cos(x^6) =$
8. $y = arc\cos(e^x + 2) =$
9. $T(s) = arc\cos(e^{-5s}) =$
10. $y = arc\cos(5^{3x} + 2x) =$
11. $f(z) = -6\, act\tan(z) =$

12. $k(x) = \frac{2\, arc\tan\,(x)}{5} =$
13. $G(w) = e^x arc\tan(w) =$
14. $f(y) = arc\tan\,(\frac{4y^7}{3})$
15. $f(x) = arc\tan(e^{5x}) =$
16. $A(x) = 2arc\ cotg(x) =$
17. $f(x) = \frac{3\, arc\ cotg(x)}{4} =$
18. $f(x) = arc\ cotg(x^7 + 3x^5) =$
19. $f(u) = 9arc\sec(u) =$
20. $y = arc\sec(e^{3x}) =$
21. $j(h) = arc\ cosec\left(\frac{3h^7}{2}\right) =$
22. $y = arc\ cosec(x^2 + e^x)$

Formulario	
$\frac{d}{dx}(sen^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}(u)$	$\frac{d}{dx}(csc^{-1}u) = -\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(cos^{-1}u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}(u)$	$\frac{d}{dx}(sec^{-1}u) = \frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}(u)$
$\frac{d}{dx}(tan^{-1}u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{d}{dx}(u)$	$\frac{d}{dx}(cot^{-1}u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{d}{dx}(u)$

Actividades de contexto o Transversales

1. Una mujer camina a razón de 5 pies/seg a lo largo del diámetro de un patio circular. De un extremo del diámetro perpendicular a su trayectoria, una luz proyecta su sombra sobre la pared circular. ¿A qué velocidad se mueve la sombra en la pared cuando la distancia entre la mujer y el centro del patio es $\frac{1}{2}r$ donde $r\ pies$ es el radio de tal patio?

2. Un faro se encuentra a 3 km de una playa recta. Si gira a 2rpm, calcula la velocidad de su cerco luminoso a lo largo de la playa cuando el cerco se halla a 2km del punto en la playa más cercano al faro.

Las siguientes ligas, son videos que te ayudarán a comprender mejor el contenido sobre la derivada de las funciones trigonométricas inversas

https://youtu.be/5p8XXEvjIcM

https://youtu.be/tGYdMuEU7s4

https://youtu.be/swhVRBgiTdQ

https://youtu.be/aNASRj9zLAA

Glosario

Análisis
Parte de las matemáticas basada en los conceptos de límite, convergencia y continuidad, que dan origen a diversas ramas
cálculo diferencial e integral, teoría de funciones, etc. 5, 17, 78

Ángulo
Figura geométrica formada por dos rectas o dos planos que se cortan respectivamente en una superficie o en el espacio.. 70

Aproximación
Resultado inexacto, pero próximo al exacto, que se obtiene en una medición o en un cálculo cuando no se puede precisar absolutamente. 15, 16, 28, 41

Biunívoca
correspondencia en que a cada elemento del primer conjunto corresponde inequívocamente un elemento del segundo..105, 106, 107, 111, 112

Creciente
Que crece.. 59, 60, 62, 63, 68, 69, 105, 106

Decreciente
Que decrece o disminuye...59, 62, 63, 68, 69, 76, 78, 86, 105, 110

Denominador
En las fracciones, número que expresa las partes iguales en que una cantidad se considera dividida. 25, 29, 37, 38, 40, 55, 60, 107

Dominio
Denominación que identifica a un sitio en la red y que indica su pertenencia a una categoría determinada... 16, 105, 108, 109, 110, 111, 112

Factor
Cada una de las cantidades o expresiones que se multiplican para obtener un producto.9, 29, 30, 51, 60

Función
Relación entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primero un elemento del segundo o ninguno.2, 6, 11, 16, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 56, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 94, 100, 101, 103, 104, 105, 106,107, 108, 109, 110, 111, 112

Indeterminación
Falta de determinación en algo, o de resolución en alguien. 28, 29, 30, 31, 32

Límite

En una secuencia infinita de magnitudes, magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de la secuencia.2, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 49, 50, 51

Numerador

Guarismo que señala el número de partes iguales de la unidad contenidas en un quebrado y que se escribe separado del denominador por una raya horizontal o inclinada. 25, 37, 38, 39, 55, 107

Razón

Cociente de dos números o, en general, de dos cantidades comparables entre sí...........14, 48, 114

Rendimiento

Proporción entre el producto o el resultado obtenido y los medios utilizados. 70

Segmento

Cada una de las partes de una esfera cortada por un plano que no pasa por el centro................. 14

Sucesión

Conjunto ordenado de términos que cumplen una ley determinada. 12, 14, 15, 16, 21, 22, 23

Tabulación

Acción y efecto de tabular (hacer una tabla).. 15

Variable

Cada uno de los subconjuntos del mismo número de elementos de un conjunto dado, que difieren entre sí por algún elemento o por el orden de estos. 15, 26, 37, 38, 52, 62, 74, 75, 104, 105

Fuentes consultadas

Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F. V., Gallegos Ruíz, H. A., Cerón Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2009). *Aritmética*. México: Pearson.

Ayres, F. Jr., Ph. D. (1980) *Cálculo diferencial e integral (2ª. Edición)*. México: Editorial Mc Graw hill.

Edwards, C. H., Jr. David E. Penney. (1990) *Cálculo y geometría analítica (2ª. Edición)*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Garza Olvera, B. (1998) *Cálculo diferencial. Matemáticas IV (Segunda reimpresión)*. México: Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V.

Granville, W. *Cálculo diferencial e integral (3ª. Edición)*. México: Editorial Limusa

Haeussler, E.,Richard, S (1994). *Matemáticas para administración y economía (2ª. Ed)*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Lithol, L. (1994) *El Cálculo con Geometría Analítica*, Oxford University Press. México: Grupo Mexicano Mapasa, S.A de C.V.

Mediano, J.M. (2016). Matemáticas II (Bachillerato de ciencias). ESPAÑA: EDICIONES SM.

Purcell Edwin J., Varberg Dale, Rigdon Steven E. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Sánchez, OSCAR., García, RODOLFO., Preciado, ADRIANA. y Robles, RAMÓN. (2015). Cálculo diferencial Bachillerato Tecnológico. Guadalajara, Jalisco, México: KeepReading

Aguilar Márquez, A., Vázquez, I. B., Vlapai, F., Ruiz, I. G., & Aurelio, H. (2009). *Matemáticas simplificadas* (Segunda ed.). Estado de México, México: Pearson Educación.

Hernández, E. (2016). *Cálculo diferencial e integral, con aplicaciones* (Primera ed.). Costa Rica: Revista digital Matemática Educación e Internet.

Purcell, E. J., & Dale, V. (2007). *Calculo Diferencial e Integral* (Novena ed.). Estado de México, México: Pearson Educación.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una Variable, trascendentes tempranas* (Séptima ed.). Cengage Learning Editores.

Directorio

Dr. Rafael Sánchez Andrade
Jefe de la Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios

Ing. Luis Miguel Rodríguez Barquet
Director Académico de Innovación Educativa

Mtra. Laura Leal Sorcia
Subdirectora de Innovación Académica

MC Gerardo Valdés Bermudes
Presidente de la Academia Nacional de Matemáticas de la UEMSTIS

MC Luis Manuel Guerra Franco
Secretario de la Academia Nacional de Matemáticas de la UEMSTIS

MC Miguel Constantino Hernández Pérez
Coordinador de la Mesa de trabajo de Cálculo Diferencial

ME Omar Eduardo De la Torre Aldama
MC Gerardo Valdés Bermudes
Ing. Norma Patricia Hernández Tamez
Edición de la obra

Academia Nacional de Matemáticas

Integrantes de la Academia Nacional de Matemáticas que participaron en la elaboración de ésta obra

Nombre	Plantel	Estado
Juan Carlos Díaz Puga	CBTIS 39	Aguascalientes
José Antonio Hirata Moyeda	CBTIS 140	Baja California
José Luis Colorado Betanzos	CBTIS 69	Baja California Sur
Raúl Toledo Escobar	CBTIS 62	Baja California Sur
Ana María García Zúñiga	CETIS 2	CD. de México
Loan Alejandra Servín Rodríguez	CETIS 52	CD. de México
Yudibeth Sánchez Castellanos	CETIS 138	Chiapas
Miguel Ángel Peña Ogaz	CBTIS 228	Chihuahua
Omar Eduardo De la Torre Aldama	CETIS 83	Coahuila
J. Armando Quezada López	CBTIS 89	Durango
Marcos Belisario González Loria	CBTIS 160	Estado de México
David Fernando López López	CBTIS 172	Guanajuato
Julián Bello Ríos	CETIS 90	Guerrero
Emilio Jaime Mendoza Gómez	CBTIS 199	Hidalgo
Eliseo Santoyo Teyes	CBTIS 226	Jalisco
Oscar Villalpando Barragán	CBTIS 12	Michoacán
Luis Manuel Guerra Franco	CBTIS 76	Morelos
Joaquin Hurtado Gorostieta	CETIs 12	Morelos
Lucía Sánchez Ramos	CBTIS 74	Nuevo León
Eva Cruz Brena	CBTIS 183	Oaxaca
Julio Alberto González Negrete	CBTIS 86	Puebla
Gilmer de Jesús Pat Sánchez	CBTIS 111	Quintana Roo
Gerardo Valdés Bermudes	CBTIS 224	Sinaloa
Lucerito de la Paz Orta Castillo	CBTIS 87	San Luis Potosí
Martín Vega Gómez	CETIS 128	Sonora
Norma Patricia Hernández Tamez	CBTIS 007	Tamaulipas
Miguel Constantino Hernández Pérez	CETIS 132	Tlaxcala
Miguel Ángel Pavón Cordero	CBTIS 48	Veracruz
Silvia Leonor Martínez Quijano	CBTIS 80	Yucatán
Efraín Reyes Cumplido	CBTIS 104	Zacatecas