EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN TECNOLÓGICA INDUSTRIAL Y DE SERVICIOS

Academia Nacional de Matemáticas

Geometría y Trigonometría

Aprendizajes Esenciales
febrero-julio de 2021

Segunda Edición

México 2021 Año de la Independencia

Manual del alumno

In memoriam

Un maestro afecta la eternidad; solo él puede decir donde para su influencia.

Henry Adams

En homenaje a nuestros queridos amigos

Armando Rosas Zepeda
Justino Maza Román
Nelson Gutiérrez Valdés
Ramón Figueroa Saucedo

Índice

Encuadre

Propósito

Desarrollar las competencias necesarias para el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes de Bachillerato Tecnológico, en los planteles de la DGETI de la República Mexicana, y que le permita lograr el perfil de egreso que exigen los nuevos tiempos, enfrentando la contingencia actual por el SARS-CoV-2 en su permanencia en casa. Cada manual está diseñado, principalmente, para los alumnos con falta de recursos y/o conectividad para que puedan seguir con sus clases desde casa, así mismo, es muy práctico para trabajar con los alumnos que si cuentan con los recursos para llevar sus clases en línea, y como apoyo al docente titular de las asignaturas para propiciar en el alumno, aún en la distancia, el interés de dirigir su automotivación hacia el aprendizaje autodidacta de los contenidos de los programas de estudio vigentes de las asignaturas de Matemáticas de bachillerato en el plan nacional educativo, a través de la construcción de su propio conocimiento y la aplicación pertinente de ellos en su contexto personal y su vida cotidiana desde una óptica crítico-analítica del pensamiento individual.

Marco teórico

Los seres humanos somos capaces de conocer el mundo a través del lenguaje, del análisis lógico-matemático, de la representación espacial, del pensamiento musical, del uso del cuerpo para resolver problemas o hacer cosas, de la propia interpretación del universo, a interrelación con los demás individuos y de una auto comprensión de nosotros mismos. Donde los individuos se diferencian en el nivel e intensidad de sus habilidades y en las formas en que recurre a esas mismas y se les combina para llevar a cabo diferentes labores, para solucionar diversos problemas y progresar en distintos ámbitos.

Las personas aprenden, representan y utilizan el saber de muchos y diferentes modos, estas diferencias desafían al sistema educativo, que hoy en día lucha por contraponerse a las ideas erróneas de que todo el mundo puede aprender los mismos conocimientos, las mismas disciplinas y del mismo modo y que basta con una medida uniforme y universal para poner a prueba el aprendizaje de los alumnos.

Los procesos de aprendizaje de las matemáticas requieren de estrategias que permitan al alumno que las competencias que son adquiridas en la escuela se sitúen en un ambiente cotidiano para relacionar, interpretar inferir y aplicar los saberes a la resolución de problemas.

El desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes se relaciona directamente con las condiciones que se deben dar para lograr que los aprendizajes en el estudiante sean significativos y lo más funcional posible.

El proceso de evaluación de las competencias consiste en utilizar los medios que permitan a los alumnos reconocer si los esquemas de actuación aprendidos le son de utilidad, a tal grado que le sirvan para intervenir correctamente ante una situación problemática planteada en la cotidianidad.

Marco referencial

Al analizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es posible percatarse que los alumnos han experimentado una serie de estrategias por parte de los docentes para que las competencias las transfieran en situaciones de la vida real. Esto exige relacionar, interpretar, inferir, interpolar, inventar, y aplicar los saberes a la resolución de problemas, mediante la intervención en la realidad reflexionando y actuando sobre la acción y reaccionando con responsabilidad ante situaciones imprevistas o contingentes.

El aprendizaje por competencias está directamente relacionado con las condiciones que deben darse para que los aprendizajes sean los más significativos, situados y funcionales posibles.

La evaluación del aprendizaje de competencias responde a la evaluación de contenidos; pero no toda la evaluación está referida a ello. Si consideramos que la evaluación es un aspecto complejo donde convergen diferentes dimensiones, entonces debemos considerar que están implicados procesos de evaluación también complejos.

El proceso de evaluación de las competencias consistirá en utilizar los medios que permitan reconocer si los esquemas de actuación emprendidos por el estudiante pueden serle de utilidad para superar situaciones reales en contextos concretos lo más aproximados a la realidad; para evaluarla es necesario tener datos fiables sobre el grado de aprendizaje de cada estudiante con relación a la competencia implicada, para ello se requiere el uso de instrumentos y medios diversos en función de las características propias de cada competencia y los distintos contextos donde ésta debe o puede llevarse a cabo.

Dado que las competencias están constituidas por uno o más contenidos de aprendizaje, es necesario identificar los indicadores de logro para cada uno de ellos, pero integrados o que se puedan integrar en la competencia correspondiente y el medio para conocer el grado de su aprendizaje será la intervención del estudiante ante la situación problemática planteada. La evaluación bajo el enfoque de competencias no solo implica evaluar el resultado del aprendizaje del alumno, también el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que conlleva a que en paralelo también el facilitador va desarrollando, aprendiendo y evaluando bajo el enfoque de competencias, su propia praxis educativa.

Características del curso

El curso tal y como aparece en este manual, pretende abarcar los aprendizajes esenciales que le sean útiles al alumno del semestre correspondiente de bachillerato, en los horarios asignados por las autoridades directivas de cada plantel a los titulares de la asignatura. La modalidad del curso es a distancia, es decir, utilizando las herramientas digitales que le permitan al docente comunicarse en el marco de la presente contingencia por la pandemia e interactuar con sus alumnos no teniéndolos presentes físicamente. No obstante, considerando que existen alumnos que no cuentan con los recursos y/o conectividad para sus clases en línea, este manual va dirigido a ellos principalmente.

Los manuales están estratégicamente diseñados para propiciar un aprendizaje autodidacta para quienes no cuentan con los recursos y/o conectividad, así como la participación activa de quienes llevan sus clases en la modalidad en línea, la cual implica un compromiso entre el facilitador y los alumnos para alcanzar los objetivos del curso. Asimismo, las etapas de apertura, desarrollo y cierre, así como las actividades de contextualización y transversalidad y el tipo de ejercicios, permitirá crear las condiciones para estimular un trabajo en el que prevalezca la intención comprometida de cada uno de los participantes, para analizar y extraer las características más relevantes de las situaciones problemáticas; discutir y encontrar formas de solución de los problemas y elegir, entre ellas, las más eficaces, así como fundamentar, en todo momento, el porqué de la estrategia de solución.

Un escenario de este tipo pretende crear las condiciones que propician aprendizajes significativos desde la distancia, donde lo más importante radica en ser consciente de lo que se hace y para qué se hace, y no sólo de solucionar el problema. En esta perspectiva, el docente está comprometido a supervisar de manera permanente el trabajo de sus alumnos, orientar y retroalimentar los contenidos que se requieran en plenarias, o en especial individualización, respetando los procesos de discusión y los argumentos que conduzcan al entendimiento y solución de los ejercicios, atender las dudas individuales y propiciar, siempre, la participación activa y comprometida de los estudiantes. Asimismo, el titular deberá realizar las siguientes actividades:

1. Al inicio del curso, el facilitador creará grupos en la herramienta digital que considere pertinente (Zoom, Google Meet, Classroom, WhatsApp, correo electrónico, etc.) y cerciorarse que esté incluida la totalidad de alumnos en sus grupos escolares correspondientes.

2. Ya creados los grupos digitales, realizar una dinámica para tratar de conocer a sus alumnos y explicar los objetivos del curso, duración, desarrollo, evaluación y compromisos que se adquieren al asistir al mismo.

3. Podrá hacer uso de la metodología del aula inversa a través de videos que ilustren el desarrollo de las actividades a realizar en cada sesión del curso. Dichos videos han sido seleccionados de la plataforma *Khan Academy* y *YouTube* y serán analizados por los alumnos el día anterior como una actividad extra clase a la sesión correspondiente de cada uno de los temas.

4. Apertura de sesiones. Se recomienda que la apertura se realice con el pase de lista y la resolución de la tarea diaria. Retroalimentando los errores identificados y aclarando dudas.

5. Cierre de sesiones. El cierre se realizará con una pregunta y los comentarios que de ella se deriven. Las preguntas pueden ser: ¿Qué aprendimos el día de hoy? ¿Cuál fue el error más grave que cometimos y cómo lo resolvimos?, entre otras.

6. Asesoría y seguimiento del desempeño de alumnos en la resolución de ejercicios para el aprendizaje y habilidad matemática, marcando un tiempo para su realización individual, al término del cual se preguntará quiénes han concluido, socializando en plenaria las soluciones.

7. Incluir en clase los Retos Transversales y las lecciones Construye T correspondientes a la asignatura y desarrollarlos, considerando una calificación ponderada formativa y sumativa.

8. Considerando la situación especial de contingencia por la pandemia del Covid 19, se podrá omitir la coevaluación y autoevaluación de los alumnos. Al término del curso, el docente evaluará en una escala de 0 a 10, los siguientes aspectos:

· Cumplimiento de los objetivos del curso.

· Dominio de los contenidos.
· Cumplimiento individual de las tareas, trabajos y evaluaciones en tiempo y forma. (Salvo casos especiales y no conectados)

9. Esta obra se hará llegar a los alumnos por los medios que dispongan en el contexto de cada región del país, tratando de abarcar la totalidad de la población de estudiantes de la DGETI. Para ello, en los planteles se establecerán los mecanismos para que se lleve a cabo una interacción favorable entre maestros y alumnos, a fin de dar seguimiento a los avances que tengan los jóvenes y establecer los criterios de evaluación que se consideren viables de acuerdo con las circunstancias de cada región, en el marco de la contingencia actual.

Recomendaciones para la impartición del curso

Este material contempla en su estructura una serie estrategias didácticas y ejercicios con un grado de complejidad gradual ascendente, cuyo principal propósito es que los procedimientos para su resolución y respuestas sirvan de parámetro a todos los involucrados en el proceso educativo, para emitir una opinión basada en el análisis de su alcance e importancia de desarrollarse siguiendo un razonamiento lógico-matemático.

Debido a la trascendencia académica del curso sugerimos tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. Los ejercicios tienen un grado de complejidad ascendente, por lo que es recomendable que el docente informe a los alumnos sobre el impacto que tiene cada habilidad en el aprovechamiento escolar; de igual forma es pertinente que si observa en el grupo dificultades en alguna habilidad la ejercite hasta que se domine, o en su defecto, brinde la oportunidad al estudiante de desarrollarla en otro espacio (plataforma Khan Academy, por ejemplo), o la estrategia que el considere pertinente.

2. El docente podrá grabar sus propios videos explicativos, proporcionar links de videos y textos explicativos de los temas, tutoriales, etc. con el propósito de que el estudiante tenga los recursos suficientes para la adquisición de las competencias y aclaración de posibles dudas en los contenidos.

5. Proporcionar al alumno y si es posible a los padres de familia (grupo de Whats App), los aspectos a considerar en la evaluación y su promedio parcial y final a tiempo para que tenga oportunidad de prepararse y regularizarse, de ser necesario.

6. Se debe tener consideración y empatía con aquellos alumnos que no tengan el recurso de conectarse diariamente y tratar de localizarlos con medios que estén al alcance de sus posibilidades y dándoles la oportunidad de trabajar o regularizarse en las condiciones que le favorezcan. Como, por ejemplo, ponerse de acuerdo en entregar tareas o evaluaciones en un punto de reunión física, por excepción y siguiendo las consideraciones de la contingencia.

Competencias a desarrollar en el curso

COMPETENCIA	ATRIBUTOS
1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	1. Enfrentan las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
	2. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.	1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
	2. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en que se encuentra y los objetivos que persigue.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
	6. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
	3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos grupos de trabajo.

Introducción

Debido a la presente prolongación del confinamiento social por la pandemia del SARS-CoV-2, una vez más las autoridades de la Secretaría de Educación Pública de México, han optado por la apertura de las clases a distancia en todos los niveles educativos, aprovechando los medios electrónicos actuales para que los docentes puedan desarrollar su cátedra de manera digital, teniendo comunicación con sus grupos de alumnos y así poder desarrollar las estrategias pertinentes que le permitan al estudiante alcanzar, en lo mayor posible, las competencias establecidas en los planes y programas de estudio nacionales.

Este manual representa la segunda edición (el primer manual fue generado de manera emergente por la Academia Nacional de Matemáticas, al iniciar la suspensión de clases presenciales en el país, en marzo del 2020 y se enfocó en su momento en cubrir los aprendizajes esenciales del segundo y tercer periodo parcial del semestre que quedaban pendientes, ya que el primer parcial se alcanzó a realizar de manera presencial en las aulas). Para ésta edición se incorporan las actividades propuestas para el primer periodo parcial, determinados por la Academia Nacional de Matemáticas, con el propósito de establecer los Aprendizajes Esenciales que se requieren de ésta asignatura en la formación de los alumnos de bachillerato de la DGETI.

Se trata de una estrategia didáctica que les permitirá a los estudiantes de bachillerato de este subsistema, tanto para los que cuentan con recursos para la modalidad en línea o para los que no, adquirir las competencias necesarias a partir de la recuperación de los conocimientos previos y la construcción de aprendizajes elementales, para continuar con su desarrollo y formación académica a través de la adquisición del sentido numérico, con el cual pueda transitar eficientemente hacia el manejo y comprensión de la abstracción que da el conocimiento lógico-matemático. La construcción del conocimiento deberá ser individual y colaborativa, donde todos los estudiantes tengan la oportunidad de adquirir los mismos conocimientos, según su propia percepción de la realidad.

El curso consta de tres periodos parciales, donde el alumno, guiado por el docente titular, deberá participar activa y dinámicamente en la construcción de sus aprendizajes y la solución de problemas en cada asignatura, en el marco de un ambiente digital y a distancia, debido a la imposibilidad de realizarse presencialmente por el riesgo de contagios presente en esta época de pandemia que nos tocó vivir.

El manual está estructurado en secciones que incluyen actividades de apertura, desarrollo y cierre como estrategias sistemáticas que le permitan al estudiante construir su conocimiento personal, adueñándose del manejo de las herramientas esenciales que le serán útiles en la adquisición de conocimientos formales posteriores y llegar a alcanzar su formación profesional y poder intervenir en los cambios que la sociedad actual le demande.

¡Somos orgullosamente DGETI!

Justificación

Si bien es cierto, las dificultades de comprensión y habilidades en matemáticas no se generan en el bachillerato, pero sí se reflejan en el aprovechamiento de los alumnos en este nivel y por consecuencia en la educación superior, por lo que se hace necesario emprender acciones dirigidas a subsanar dichas inconsistencias. Estamos convencidos que los jóvenes de nuevo ingreso al nivel medio superior mejorarán con la práctica su capacidad de observación, globalización, jerarquización, regulación de su propia comprensión, y por consecuencia, sus competencias matemáticas, cuya utilidad se verá reflejada, no sólo en el contexto académico, sino en cualquier ámbito de su vida cotidiana. Para los estudiantes que ingresan al bachillerato, es importante que inicien con una recapitulación de sus estudios básicos, porque el conocimiento de los números es una herramienta indispensable para comprender los procesos y fenómenos sociales y naturales, además es el fundamento para iniciar con los procesos de abstracción que requiere el álgebra, la geometría y el cálculo.

Bloque 1 | Conceptos básicos

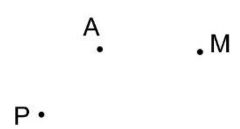
1.1 Concepto y notación de plano, punto, recta, segmento y semirrecta

Introducción

Los conceptos que son la base del campo de estudio de la Geometría son: Punto, recta y plano. Estos conceptos no son definibles puesto que en su definición se requiere de conceptos más generales, por lo que solo se explican para aclarar la idea que pretenden expresar.

Punto

El punto en Geometría se utiliza para indicar posición. La representación del punto es una pequeña marca circular que se debe entender que no tiene dimensiones, es decir, no se puede medir. Para identificar o denotar un punto se emplean letras mayúsculas. La siguiente figura muestra tres puntos A, M y P.

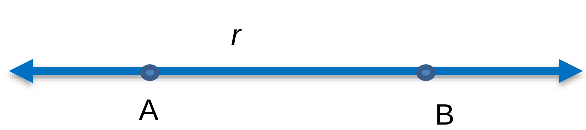


Recta

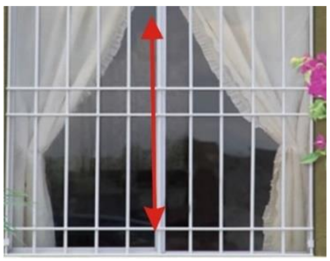
Una recta es un conjunto sucesivo de puntos que se extienden infinitamente en ambos sentidos, tiene una sola dimensión (longitud).

Para nombrar o denotar una recta se utilizan dos puntos cualesquiera que pertenezcan a ella con una flecha de doble punta sobre ellos o bien una letra minúscula, como se muestra a continuación:

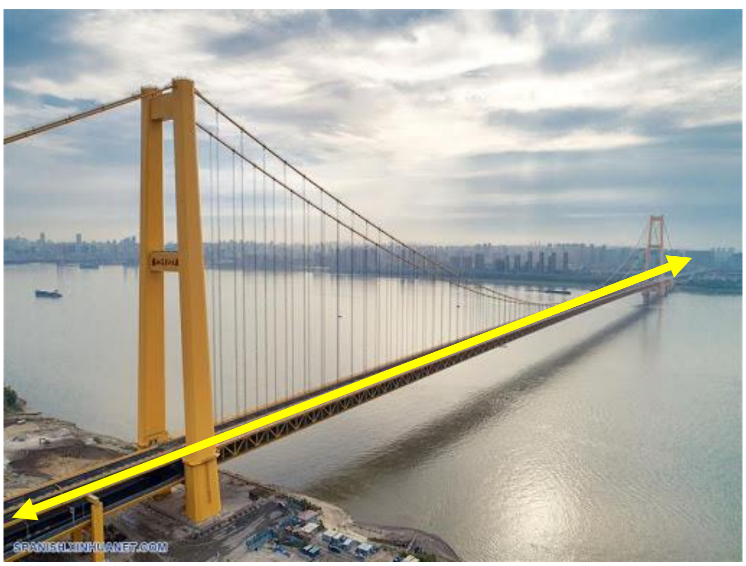
En la imagen encontramos la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (obsérvese que se dibuja una línea arriba de las letras) que pasa por los puntos A y B. La recta de la figura también está identificada como la recta r.



Todos los objetos del mundo real los podemos concebir, usando la capacidad de abstracción, como formados por objetos geométricos; aunque estrictamente hablando, no existen los objetos geométricos en el mundo real. Las formas las podemos hacer reales si las despojamos de las características que no son importantes para su estudio. Mediante la abstracción, podemos equiparar una carretera con una recta o parte de esta, aunque sabemos que no solo tiene longitud, un pizarrón con una porción de un plano, aunque no sea perfectamente liso y así sucesivamente. Ejemplos:



Debido a que no tiene bordes la ventana podemos ejemplificarla como una línea recta



Partición de una recta.

Si sobre una recta se denota la porción comprendida entre dos de sus puntos, incluyendo dichos puntos, llamamos **segmento** a dicha porción.

Si consideramos un punto que divide a cualquier recta entonces esta se divide en dos porciones o partes. La porción que contiene al punto de división se le denomina **rayo** mientras que la parte que no contiene al punto, se llama **semirrecta.**

La notación del rayo y semirrecta se representan así:

Se observa el rayo $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{PQ}$ lee semirrecta PQ

Nota que el punto P está vacío, es decir, no pertenece a la semirrecta.

Segmento de recta

Si sobre una recta se escribe los puntos A y B, se llama segmento al conjunto de puntos formado por todos los puntos entre A y B incluyendo los puntos A y B (nótese el guion que se le debe de poner arriba de las letras mayúsculas).

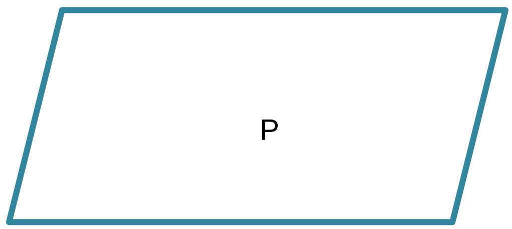
El segmento de recta anterior se denota $\overline{AB}$. La siguiente figura muestra el segmento de $\overline{AB}$.

Ejemplo:

Las durmientes de madera de la vía ilustran segmentos de rectas.

Plano

Si una recta se traslada en una dirección distinta a la que se extiende, en ambos sentidos, barrerá una superficie, dicha superficie se conoce como **Plano**. Un plano tiene dos dimensiones de longitud. Un plano en matemáticas se imagina como una extensión ilimitada, ejemplo: Una mesa de vidrio o la cubierta de un escritorio dan la idea de un plano, o más correctamente, porciones de un plano. Un plano se representa geométricamente por una figura de cuatro lados y una letra mayúscula. La siguiente figura representa al plano P. También se puede nombrar utilizando 3 puntos que pertenezcan al plano. Por ejemplo, Plano ABC.



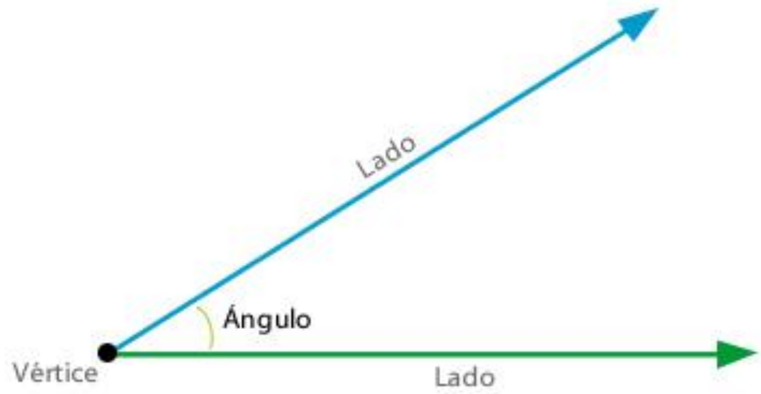
Ejemplos:

En un pizarrón se puede considerar el área verde como parte de un plano.

En la mesa de billar al espacio en morado es otro ejemplo de parte de un plano.

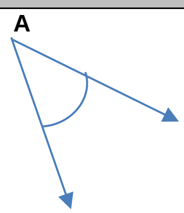
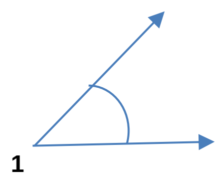
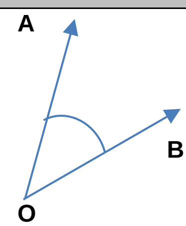
Todos los objetos geométricos se pueden considerar compuestos de puntos, rectas y planos. Por ejemplo, los ángulos están formados por rayos, los cuales son, como ya sabes, porciones de rectas que quedan en un mismo plano.

Un ángulo es la abertura comprendida entre dos rayos que tienen un origen común. El punto de origen se conoce como vértice del ángulo y los rayos son sus lados.

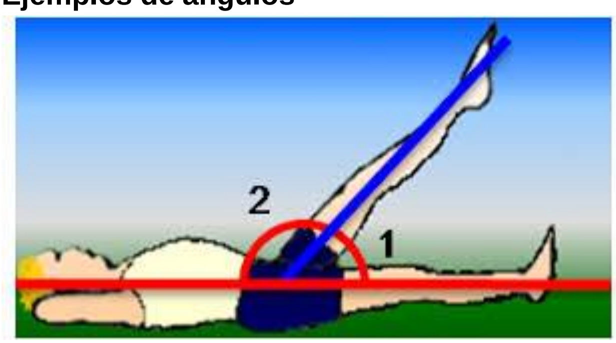


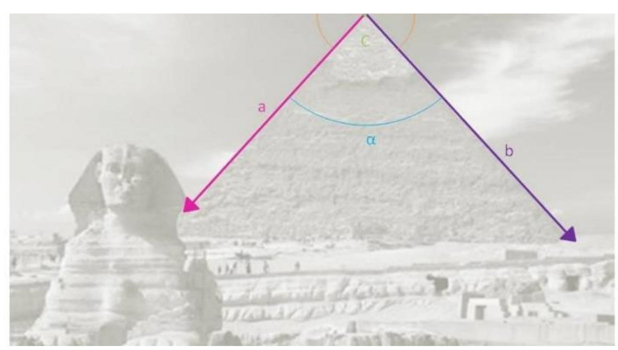
Notación de ángulos

Para representar que es un ángulo ocupamos el símbolo ∡

Por una letra mayúscula (indica el vértice)	Con un número (indica el vértice)	Empleando tes letras, nótese que la de en medio es el vértice
		
∡A	**∡1, también se pueden usar letras griegas en lugar de números.**	**∡AOB**

Ejemplos de ángulos





Actividades de Apertura

Contesta si las siguientes proposiciones son falsas F o verdaderas V, colocando la letra que corresponda en el paréntesis.

1. La recta está formada por un número finito de puntos. (   )
2. La magnitud de un ángulo depende de la longitud de sus lados. (   )
3. Un rayo y una semirrecta son el mismo objeto geométrico. (   )
4. Un segmento tiene mayor longitud que un rayo. (   )
5. Por dos puntos solo se puede trazar una recta. (   )
6. La recta y el plano están formados por puntos. (   )
7. Por tres puntos cualesquiera, solo puede trazarse un plano. (   )
8. Por cuatro puntos cualesquiera solo puede trazarse un plano. (   )
9. Si dos rectas se cruzan, forman 2 ángulos. (   )
10. La intersección de dos planos es un punto. (   )

Actividades de Desarrollo

1. Elabora un diagrama de la fachada de tu casa y localiza y nombra lo siguiente.
    a) Tres puntos que sean a su vez vértices de un ángulo.
    b) Dos puntos que sean los extremos de un segmento.
    c) Tres segmentos.
    d) Un plano.
    e) Dos rayos.

2. Considera una caja de zapatos tradicional y dibújala. En dicho dibujo denota o nombra lo siguiente:
    a) Dos planos
    b) Cuatro ángulos.
    c) Dos semirrectas.
    d) 4 segmentos.

Actividades de cierre

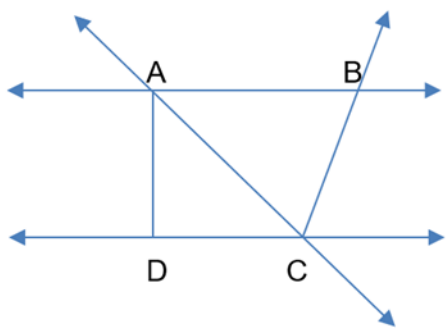
1. En la siguiente figura se denotan puntos evidentes. Utilice estos puntos para identificar lo siguiente:

a) Un segmento de recta _______

b) Tres rectas. _____, ______, ______.

c) Un plano. ______.

d) 5 ángulos. _____, _____, _______, ______, ______.



2. Dibuja la mesa de tu casa, denota los puntos evidentes y nombra los siguientes elementos u objetos geométricos.
   a) Tres planos.
   b) Dos rectas de planos distintos.
   c) Dos ángulos de un plano y dos de otro.
   d) Dos rayos.
   e) Dos semirrectas.

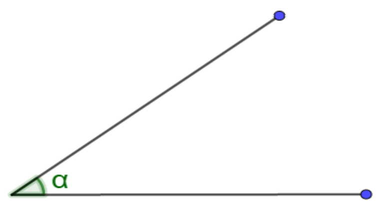
1.2 Clasificación de ángulos y unidades de medida

Introducción

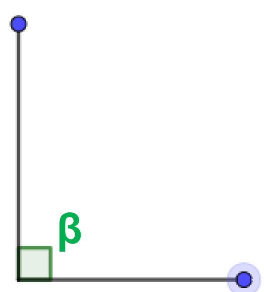
Los diferentes tipos de ángulos se distinguen de acuerdo con su medida. A continuación, los enumeraremos.

Ángulo convexo. Es todo ángulo cuya medida es mayor a 0° y menor a 180°
En esta categoría están los ángulos:

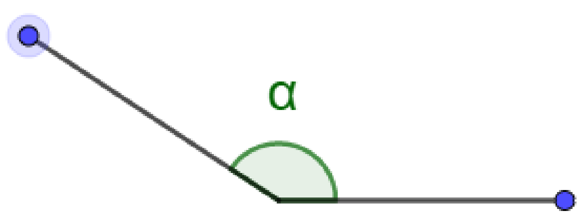
Agudos: Son aquellos cuya medida está comprendida entre 0 y 90 grados.



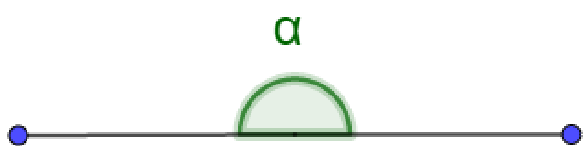
Recto: miden 90°



Obtusos: Miden entre 90 y 180 grados.

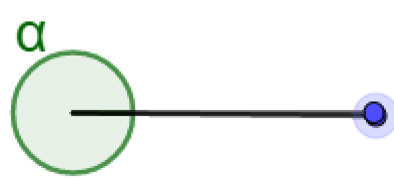


Llano: si su medida es 180°



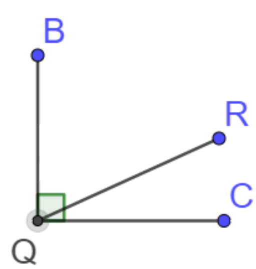
Cóncavo: su magnitud es mayor a 180° y menor a 360°

Ángulo perígono o perigonal: Mide 360°.



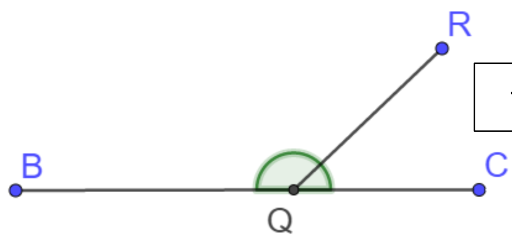
En muchas situaciones es útil definir relaciones entre dos ángulos para clasificarlos. Están son algunas clases que debes conocer para que te sea más fácil resolver problemas que involucran ángulos.

Ángulos complementarios: son dos ángulos cuya suma es igual a 90°



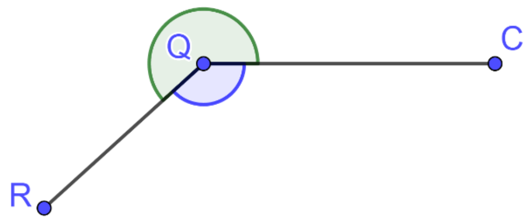
$$< CQR + < RQB = 90°$$

Ángulos suplementarios: son dos ángulos cuya suma es 180°



$$< CQR + < RQB = 180°$$

Ángulos conjugados: dos ángulos cuya suma es 360°



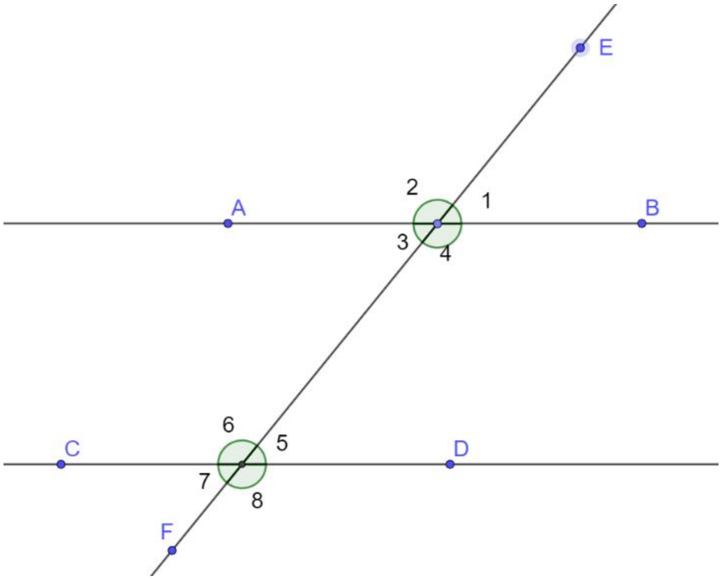
$$<CQR + < RQC = 360°$$

Ángulos formados entre dos paralelas cortadas por una transversal

Dos rectas son paralelas si al prolongarse nunca se cruzan. Si dos rectas se cruzan y forman ángulos rectos, es decir, de 90° entonces decimos que son perpendiculares. Cualquier recta que cruce o corte a dos o más rectas paralelas es una transversal.

Sean las rectas $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y la transversal $\overleftrightarrow{EF}$

Se puede apreciar que se forman 8 ángulos que guardan en parejas de ángulos ciertas particularidades en cuanto a su cómo, a continuación, se analiza:



Ángulos alternos internos: están ubicados dentro de las rectas paralelas no adyacentes colocados en ambos lados de la secante. Son alternos internos los ángulos $3\ y\ 5;\ 4\ y\ 6.$ Son de igual magnitud entre ellos.

Ángulos alternos externos: están ubicados fuera de las rectas paralelas no adyacentes colocados en ambos lados de la transversal. Son alternos externos los ángulos $2\ y\ 8;\ 1\ y\ 7.$ Son de igual magnitud entre ellos.

Colaterales internos: Ubicados internos a las paralelas, no adyacentes, ubicados del mismo lado de la transversal. $3\ y\ 6;\ 4\ y\ 5.$ Son suplementarios.

$$(\angle 3 + \angle 6 = 180°; \qquad \angle 4 + \angle 5 = 180°)$$

Colaterales externos: Ubicados externos a las paralelas, no adyacentes, ubicados del mismo lado de la transversal. $\angle 2\ y\ \angle 7;\ \angle 1\ y\ \angle 8.$ Son suplementarios.

$$(< 2 + < 7 = 180°; \qquad < 1 + < 8 = 180°)$$

Correspondientes: Ubicados del mismo lado de la transversal no son adyacentes uno interno y el otro externo. $Los\ ángulos\ \angle 2\ y\ \angle 6; \quad \angle 3\ y\ \angle 7$; $\angle 1\ y\ \angle 5; \quad \angle 4\ y\ \angle 8$. Son de igual magnitud.

Opuestos por el vértice: Tienen un vértice común y los lados de uno son la prolongación de los lados del otro. Tienen la misma magnitud o medida. Las parejas de ángulos 1 y 3, 2 y 4, 5 y 7, 6 y 8 son opuestos por el vértice.

Sistemas de Medición de ángulos

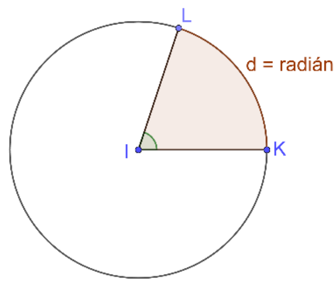
Existen tres sistemas para medición de ángulos.

1. **Sistema sexagesimal**: se caracteriza porque su sistema de medida se basa en el 60, de ahí su nombre de sexagesimal. Este sistema se utiliza también para medir tiempo.

   (1h= 60minutos; 1 minuto = 60 segundos) y para medir ángulos (1° = 60´; 1´=60´´).

La unidad de medida de ángulos en este sistema es el grado sexagesimal, el cual se define como 1/360 parte de una circunferencia. Es decir, si una circunferencia se divide en 360 partes, iniciando en su centro, cada porción forma un ángulo central (vértice en el centro de la circunferencia) que mide un grado sexagesimal.

2. **Sistema circular**: la unidad de medida es el radián, que es la abertura comprendida entre dos radios que cortan un arco de circunferencia de igual magnitud, es decir, el arco mide lo mismo que el radio.

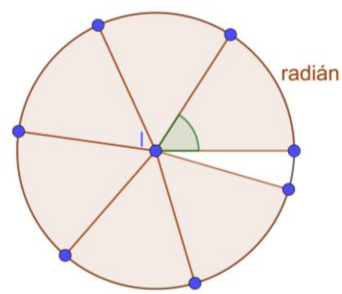


$$\boxed{\overline{IL} = \overline{IK} = \widehat{LK}}$$

3. **Sistema centesimal**: Este sistema considera que la circunferencia está dividida en 400 partes iguales, en lugar de las 360 que establece el sistema sexagesimal. Es poco usado en general.

Equivalencia entre los sistemas de medida angular.

De los conocimientos previos se sabe que la circunferencia mide 2π veces el radio, entonces en una vuelta completa de una circunferencia se forman 2(3.1416) = 6.2832 radios es lo que mide el perímetro de la circunferencia. Este valor es al mismo tiempo el número de radianes que caben en la circunferencia.



Entonces, en una circunferencia se tienen 360 arcos que miden un grado sexagesimal cada uno y 2π radianes. Por tanto,

360°= $2\pi \quad radianes$

360° = $2\pi\, radianes$ si dividimos ambos miembros entre 2 queda:

$$180° = \pi\, rad.$$

Entonces, un radián será equivalente a aproximadamente $\frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3.1416} = 57.3°$

En cambio, la equivalencia entre el sistema circular y el centesimal es:

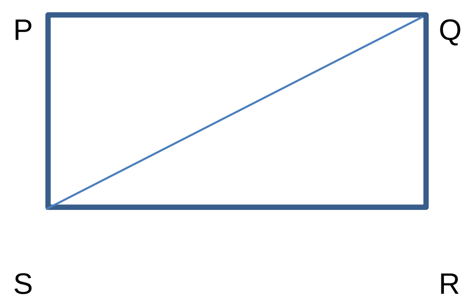
400 grados centesimales= $2\pi\, radianes$

De donde: $200\; grados\; centesimales = \pi\, rad.$

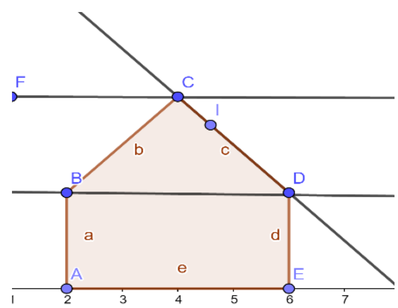
Un radián = $\frac{200\,g}{\pi} = \frac{200\,g}{3.1416}$=63.66 g, donde la g denota grados centesimales.

Actividades de Apertura

1. Con relación a la figura nombre lo siguiente:
   a) Dos ángulos rectos.
   b) Dos ángulos agudos.
   c) Dos ángulos suplementarios.
   d) Dos ángulos complementarios
   e) Dos rectas paralelas.
   f) Dos rectas perpendiculares
   g) Una recta transversal.



2. Observa la figura y determine lo que se pide.
   a) Tres ángulos agudos.
   b) dos ángulos obtusos.
   c) dos ángulos suplementarios
   d) un ángulo recto.
   e) dos ángulos opuestos por el vértice.
   f) Dos ángulos complementarios.
   g) Dos ángulos alternos internos.
   h) dos pares de ángulos correspondientes.



Actividades de Desarrollo

1. Analiza los siguientes ejemplos de aplicación de los temas anteriormente desarrollados.

a) Encuentra el complemento y suplemento del ángulo 34°

Si x es el ángulo complementario de 34°, entonces x+34°=90°, por lo tanto: x=90°- 34°= 56°.

De la misma manera, si x es el ángulo suplementario de 34°, entonces x+34°=180°, por lo tanto: x=180°-34°=146°.

b) Encuentra el complemento y suplemento de 68°25´

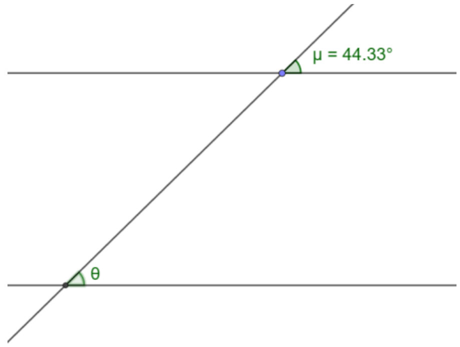
Para restar grados de una medida que tiene grados y minutos se requiere expresar la medida de 90°=89°60´ descomponiendo un grado en minutos.

Si además el ángulo tiene segundos, 90°=89° 59´60" descomponiendo además un minuto en segundos. Lo anterior es necesario pues no se pueden restar minutos de grados, como no se pueden restar cantidades de distinto tipo.

Complemento de 68° 25´ = 89° 60´ - 68° 25´ = 21° 35´

Suplemento de 68°25´= 180° - 68° 25´ = 179° 60´ - 68° 25´ = 111° 35´

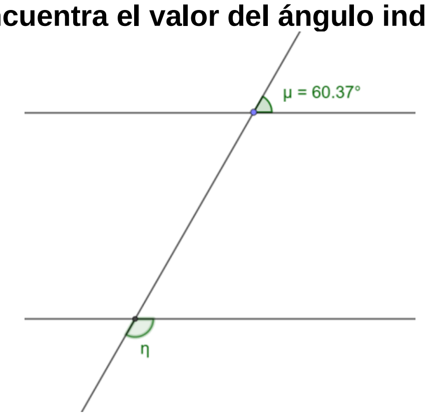
c) Encuentra el valor de θ



Los ángulos son correspondientes por lo que son congruentes, deben medir lo mismo.

$$\theta = 44.33°$$

d) Encuentra el valor del ángulo indicado

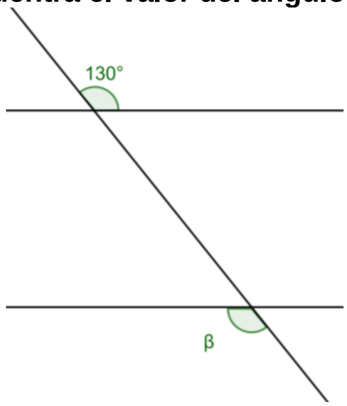


Por ser ángulos colaterales externos los ángulos son suplementarios:

η =180°-60.37°

η = 119.63°

e) Encuentra el valor del ángulo faltante



Los ángulos son alternos externos los ángulos son iguales

β = 130°

2. Ahora reafirma tu aprendizaje realizando los siguientes ejercicios.

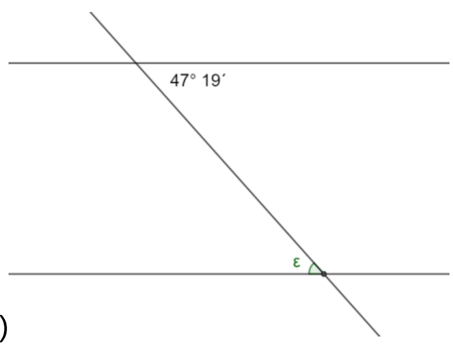
a) Encuentra el complemento de 18° 25´

b) Encuentra el suplemento de 105°36´

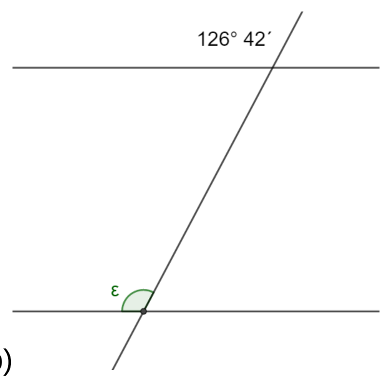
c) Determina el complemento de 89°

d) Determina el suplemento de 61° 48´ 24´´

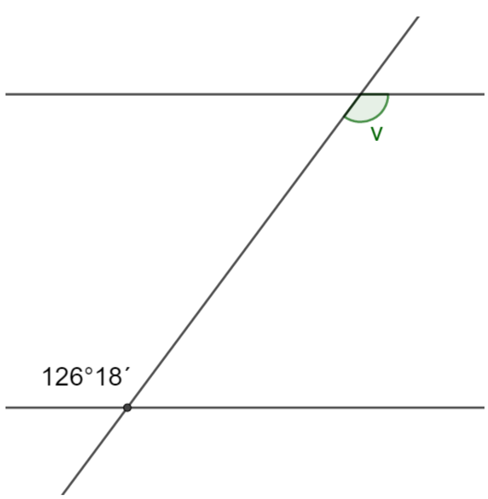
e) De las siguientes figuras determina el valor del ángulo indicado



a)



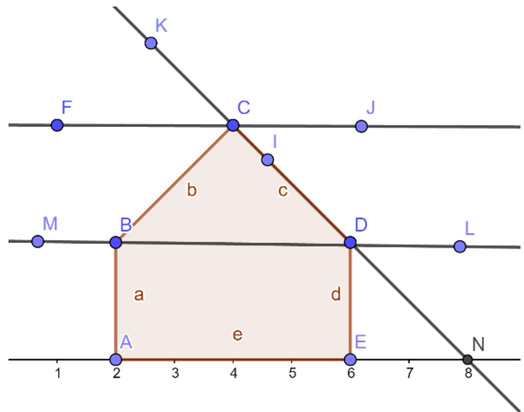
b)



c)

Actividades de cierre

1. Observa la figura mostrada y determina lo que se te solicita en cada uno de los incisos.



a) Menciona tres vértices.

b) Nombra tres ángulos agudos.

c) Nombra tres ángulos obtusos.

d) Nombra tres ángulos rectos.

e) Nombra dos ángulos alternos internos.

f) Nombra dos pares de ángulos opuestos por el vértice.

g) Si $\measuredangle KCJ$ mide 130°, ¿cuánto mide el $\measuredangle FCK$?

h) Si $\measuredangle KCJ$ mide 130° y $\overleftrightarrow{BC}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{KC}$, ¿cuánto mide el $\measuredangle BCF$?

i) Considere que el cuadrilátero $ABDE$ es rectángulo, $\measuredangle ICJ = 20°\,40'$, ¿cuál es la medida de $\measuredangle DNE$?

j) Define el perímetro del cuadrilátero $ABDE$ como la suma de los segmentos que forman sus lados.

k) Si el $\measuredangle BCD$ es recto y $\measuredangle BCF\ es\ 2°\,30'$ menor que $\measuredangle DCJ$, ¿cuánto mide el $\measuredangle CBD$?

l) Si el $\measuredangle MBC$ mide dos y media veces más que $\measuredangle CBD$, ¿cuánto mide cada uno de esos ángulos?

1.2.1 Conversiones de unidades de medida angular

Introducción

Siempre que se trata de medir magnitudes puede suceder que tengamos instrumentos de medida que manejan ciertas unidades y la medida se requiera que este en otras. Por ejemplo, una longitud la necesitas tener en centímetros, pero tu cinta de medir esta graduada en pulgadas o requieres un ángulo medido en radianes y tu transportador está graduado en grados. En estos casos necesitas hacer conversiones de unas unidades de medida a otras, para una magnitud dada.

Anteriormente dimos a conocer los sistemas de unidades para medir ángulos y las equivalencias necesarias para realizar las conversiones.

Las equivalencias útiles son:

$\pi\ radianes = 180\,°$ y 1 rad = 57.2956°.

Como el sistema centesimal a caído en desuso, no lo trataremos aquí y cuando expresemos una medida en grados, se entenderá que son grados sexagesimales.

Siempre que se realizan conversiones, la cantidad a convertir se debe multiplicar por el factor de conversión que se forma con la equivalencia. Dicho factor de conversión es una fracción que se forma de tal manera que se cancelen las unidades que tiene el valor a convertir y queden las nuevas unidades. También puedes emplear una regla de tres simple.

Ejemplo 1. Convierte 20° a radianes.

Equivalencia:

$$180° = \pi\ rad.$$

Regla para desarrollar en la equivalencia: $(valor\ a\ convertir)\left(\frac{unidad\ a\ encontrar}{unidad\ a\ cancelar}\right)$

$$(20°)\left(\frac{\pi\, rad.}{180°}\right) = (0.1111)(3.1416\, rad.) = 0.349\, radianes.$$

Ejemplo 2. Transforma 110° 25´ a radianes.

Para hacer la conversión no debemos tener unidades compuestas para el valor del ángulo, por lo que debemos convertir los minutos a la fracción de grado equivalente. Para ello dividimos 25´entre 60; $\frac{25}{60} = 0.417$ este valor se le suman los grados y queda: 110.417°. una vez que el ángulo ha sido transformado a grados hacemos su equivalencia a radianes, siguiendo la regla indicada

$$(110.417°)\left(\frac{\pi rad.}{180°}\right) = \ (110.417°)\left(\frac{3.1416\, rad}{180°}\right) = 1.927\, rad.$$

Ejemplo 3. Convierte 2.6 radianes a grados sexagesimales.

$$(valor\ a\ convertrir)\left(\frac{unidad\ a\ encontrar}{unidad\ a\ cancelar}\right) = \ (2.6\, rad)\left(\frac{180°}{\pi rad}\right) = \ \left(\frac{468°}{3.1416}\right) = 148.969°$$

También puedes utilizar la equivalencia 1 rad = 57.2956°.

$$(valor\ a\ convertir)\left(\frac{unidad\ a\ encontrar}{unidad\ a\ cancelar}\right) = \ (2.6\, rad)\left(\frac{57.2956°}{1\, rad}\right) = \ 148.969°$$

En el sistema sexagesimal se requiere expresar las fracciones de grado (decimales) en minutos y segundos de la siguiente manera:

Se multiplican las milésimas de grado por 60.

(.969) (60) = 58.1416 esto equivale a 58 minutos 1416 diezmilésimas de minuto, ahora las diezmilésimas de minuto se cambian a segundos multiplicando por 60

(.1416) (60) = 8.496=, finalmente el ángulo 148.969° = 148° 58´ 8.496´´

Ejemplo 4. Convertir $\frac{\pi}{3}$ radianes a grados.

Cuando un ángulo medido en radianes se expresa en función de π, es conveniente usar siempre la equivalencia 180°= π radianes.

$$(valor\ a\ convertir)\left(\frac{unidad\ a\ encontrar}{unidad\ a\ cancelar}\right) = \frac{\pi\, rad}{3}\left(\frac{180°}{\pi\, rad}\right) = \frac{180°}{3} = 60°$$

Actividades de Apertura

1. Cambia 89° a radianes

2. Transforma 175°39´a radianes

3. Cambia a grados sexagesimales
   a) 5 radianes
   b) 0.57 radianes
   c) 1.5 radianes
   d) 6.2832 radianes.

4. Convierte las siguientes medidas de ángulos a grados.

a) 5π radianes. b) $\frac{3}{4}\pi$ radianes. c) $\frac{5}{2}\pi$ radianes

d) $\frac{3}{8}\pi$ radianes e) $\frac{9}{4}\pi$ radianes.

Actividades de Desarrollo

1. Calcular el valor del ángulo complementario, suplementario y conjugado de cada ángulo dado en caso de tenerlos, expresar las medidas en radianes.
   a) $\frac{1}{6}\pi$ radianes.
   b) 60°
   c) 120°
   d) 4.5 radianes.
   e) 50°35´24”
   f) 320°
   g) $\frac{5}{3}\pi$ radianes

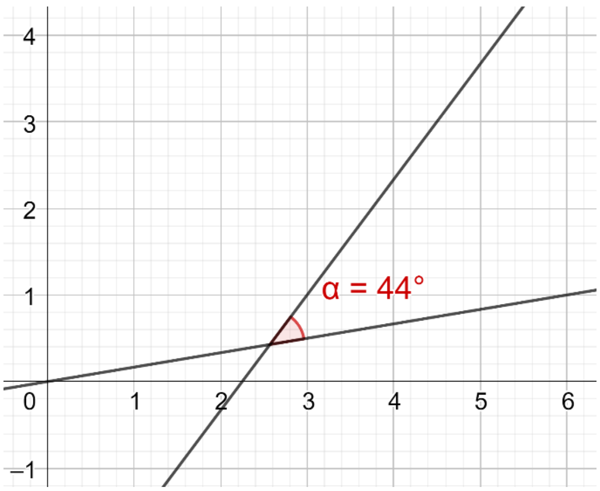
2. Calcular el valor de las siguientes sumas de ángulos. Nota: Si la medida se expresa con un número sin unidades, es una medida en radianes.
   a) 40° 20´ + 2 radianes + $\frac{1}{12}\pi$ radianes
   b) 120° + 3 π + 200°
   c) 4.2 + 2 π + 2
   d) $\frac{5}{3}\pi + \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{5}\pi$

Actividades de cierre

Convierte los siguientes ángulos a lo que se solicite:

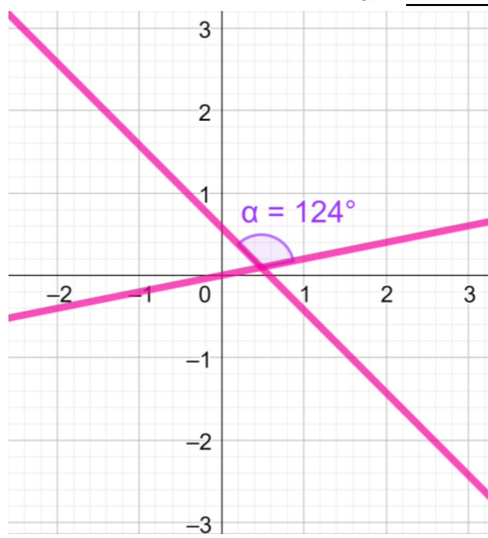
1. Expresa la medida del ángulo α a radianes:

α = ____________



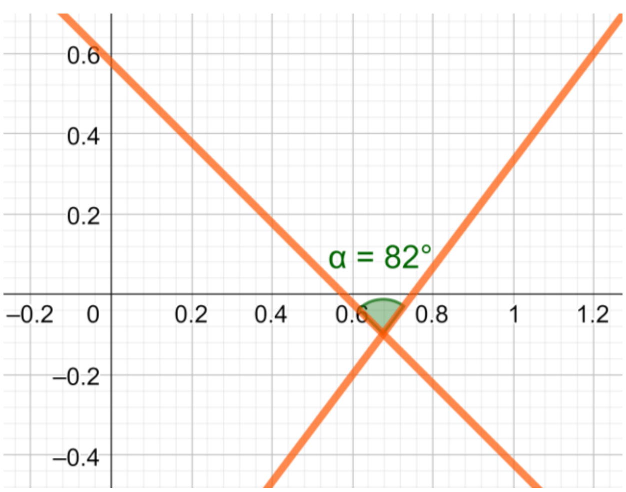
2. Expresa la medida del ángulo α a radianes:

α = ____________



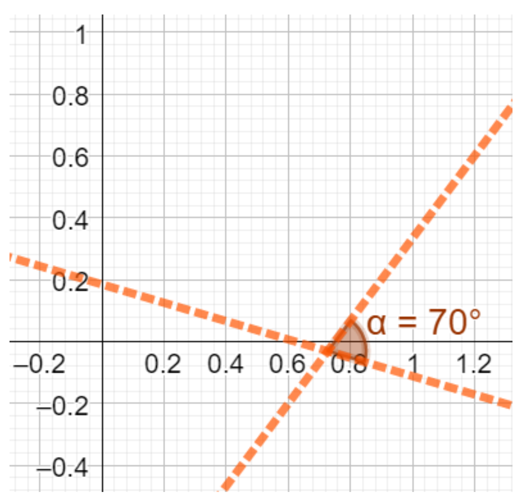
3. Expresa la medida del ángulo α a radianes:

α = ____________



4. Expresa la medida del ángulo α a radianes:

α = ____________



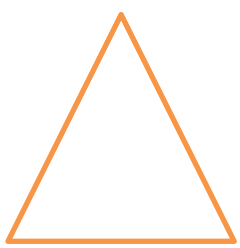
1.3 Clasificación de Triángulos y Teoremas

Introducción

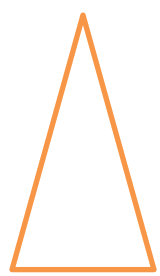
Un triángulo es un Polígono, o sea una figura formada por tres lados, tres vértices y tres ángulos. Los triángulos se clasifican según sus lados y según sus ángulos:

Según sus lados, los triángulos se clasifican en equiláteros, isósceles y escalenos.

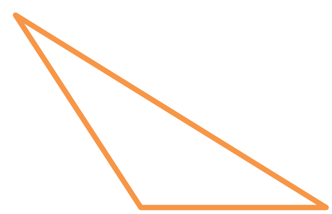
- Un triángulo equilátero tiene los tres lados congruentes, es decir, de la misma medida.
- Los triángulos Isósceles, tienen solo dos lados iguales.
- Los Triángulos Escalenos tienen las medidas de sus tres lados distintas.



Triángulo equilátero



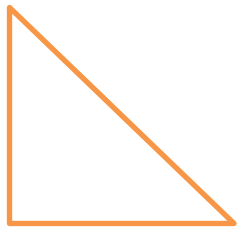
Triángulo isósceles



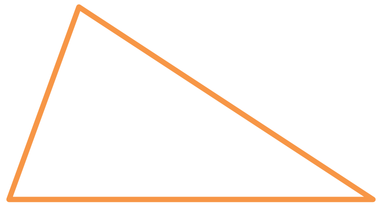
Triángulo escaleno

Según sus Ángulos los triángulos pueden ser Rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

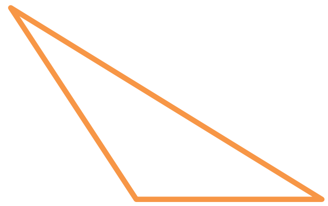
- El Triángulo Rectángulo, tiene un ángulo recto, es decir, que mide 90°.
- Triángulo Acutángulo, tiene sus tres ángulos agudos, es decir, que cada uno mide menos de 90^0,
- Triángulo Obtusángulo, cuando tiene un ángulo obtuso, o sea, que este mide más de 90^0 y los otros dos son agudos.
- Los triángulos que no son rectángulos se les denomina oblicuángulos. Los acutángulos y obtusángulos, son también oblicuángulos.



Triángulo rectángulo



Triángulo acutángulo



Triángulo obtusángulo

Teoremas sobre triángulos.

Un teorema posee dos elementos en su estructura: hipótesis, que es la que contiene los datos, y la tesis que es lo que se busca demostrar. Con esto, los teoremas se pueden definir como aseveraciones de una hipótesis o supuesto, en las que se afirman las tesis para someterse a ser demostradas. A continuación, se enlistarán algunos teoremas sobre los triángulos:

1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º
2. La suma de los ángulos externos de un triángulo es 360º
3. La medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes que lo conforman
4. La suma de dos lados es mayor que el tercero
5. El ángulo mayor es opuesto al lado mayor y al ángulo menor se opone el lado menor

A los anteriores se debe agregar el famoso Teorema de Pitágoras, el cual establece que, en cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

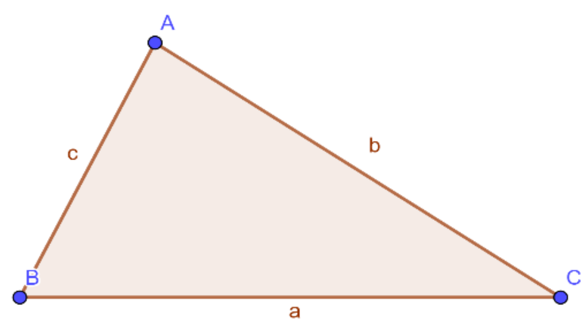
Actividades de Apertura

1. Completa la siguiente tabla que hace referencia a la clasificación de triángulos, contestando correctamente.

Clasificación de los Triángulos

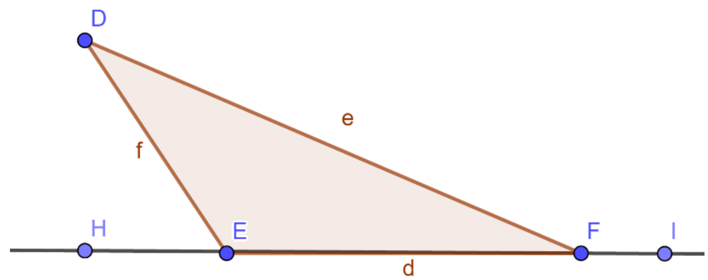
	Según sus lados			Según sus ángulos		
Nombre						
Características						
Dibujo						

2. Considere el triángulo ABC y conteste lo siguiente:



a) ¿Qué tipo de triángulo es, de acuerdo con la medida de sus lados?
b) ¿Qué tipo de triángulo es, de acuerdo con la medida de sus ángulos?
c) ¿Cuál lado es el mayor?
d) ¿Cuál es el lado menor?
e) ¿Cuál sería el orden de los ángulos de menor a mayor medida?

3. Considere el triángulo DEF y conteste lo siguiente:

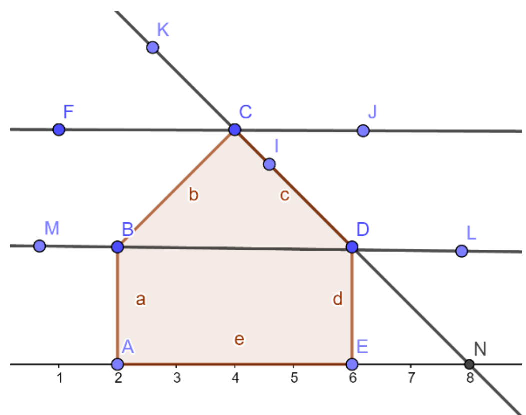


a) ¿Qué tipo de triángulo es, de acuerdo con la medida de sus lados?
b) ¿Qué tipo de triángulo es, de acuerdo con la medida de sus ángulos?
c) ¿Cuál lado es el mayor?
d) ¿Cuál es el lado menor?
e) ¿Cuál sería el orden de los ángulos interiores de mayor a menor medida?
f) Si te dicen que las medidas de los ángulos interiores son: $\measuredangle D = 15\,°, \measuredangle F = 15°, \measuredangle DEF = 140°$, estarías de acuerdo? ¿Porqué?
g) Si $\measuredangle D = 15\,°, \measuredangle F = 12°, \measuredangle DEF = 153°$, ¿cuánto mide el $\measuredangle DEH$?
h) Si se cumplen las condiciones de arriba, ¿cuánto mide $\measuredangle DFI$?

Actividades de Desarrollo

1. Dibuja un triángulo en el cual los ángulos interiores tengan su medida en la razón 1:2:3. (Esto significa que considerando la medida total se dividirá en 6 partes. Una parte le toca a uno de los ángulos, dos partes a otro y tres partes al otro).
   a) ¿Qué tipo de triángulo será?
   b) ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos interiores?
   c) ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos interiores en radianes?
   d) ¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos exteriores?

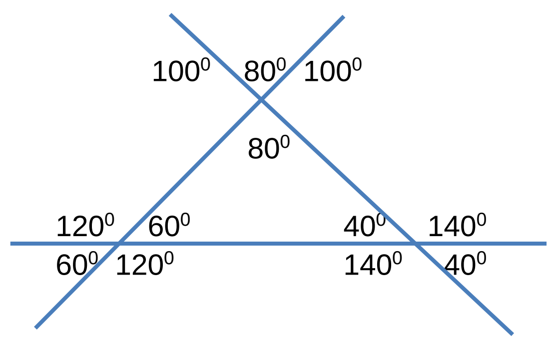
2. En la figura , $\measuredangle JCI = 18°$, el triángulo DEN es rectángulo y las rectas KC y BC son perpendiculares. Calcule:
   a) La medida del $\measuredangle LDN$.
   b) La medida del $\measuredangle CBM$.
   c) La medida del $\measuredangle BCD$.
   d) La medida de los ángulos interiores del triángulo DEN.



Actividades de cierre

1. El siguiente es un ejemplo práctico visual con el que se puede demostrar el Teorema que dice "*que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a 180^0*"; se utiliza el transportador para hacer las medidas y verificarlas visualmente.

Actividad: Dibuja en una hoja en limpio un triángulo como se muestra en la figura con las dimensiones señaladas y comprueba este Teorema.



Se puede observar que la suma de los cuatro ángulos alrededor del vértice suma 360^0, esto es lo que mide una Circunferencia en el sistema Sexagesimal, así también se ve que, si se suman dos ángulos consecutivos, resulta180^0, esto es lo que mide un ángulo Llano.

1.4 Polígonos

Introducción

En nuestro entorno hay una cantidad de formas poligonales, paredes de casas, vista frontal de edificios, esculturas, entre otras, tuercas, tornillos, etc.

El triángulo es la figura con menor números de lados del polígono. Como punto de partida es importante establecer la definición siguiente:

Los polígonos y la circunferencia son útiles en el diseño de diferentes tipos de construcciones.

Polígono es la figura geométrica de un plano que está establecida por líneas rectas. Se trata de un fragmento plano que está formado por segmentos consecutivos sin alineación, que reciben el nombre de lados. Los elementos de un polígono:

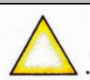
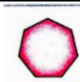
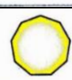
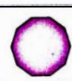
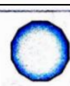
Contorno del polígono: es la línea poligonal que lo limita.
Lados del polígono: segmentos rectilíneos que forman el contorno.
Vértices del polígono: puntos donde se unen dos lados consecutivos del polígono.
Ángulos interiores del polígono: formados por cada dos lados consecutivos.
Diagonal del polígono: segmento que une dos vértices que no son consecutivos.

Las características más importantes que permiten distinguir a un polígono de otro son, además del número de lados o segmentos que lo forman, la longitud de cada uno de estos y la medida de sus respectivos ángulos, internos. Considerando estos criterios, los polígonos se clasifican de la siguiente forma:

Clasificación de polígonos

- De acuerdo con la medida de sus lados y ángulos
  - Regulares: Todos sus lados y ángulos son de igual magnitud
  - Irregulares: Sus lados o ángulos son de diferente magnitud
- De acuerdo con la medida de sus ángulos
  - Cóncavo: Alguno de sus ángulos interiores es mayor a 180°
  - Convexo: Todos sus ángulos interiores son menores de 180°

Para nombrar a los polígonos de tres o cuatro lados se le llama triángulo y cuadrilátero; para los polígonos de más de cuatro lados y menores de 20, se utiliza el prefijo que indica el número de lados (penta, hexa, hepta, etc..) y el sufijo gono que significa ángulo A continuación, los nombres de algunos polígonos:

Polígono	Lados	Vértices	Ángulos
Triángulos 	3	3	3
Cuadrilátero 	4	4	4
Pentágono 	5	5	5
Hexágono 	6	6	6
Heptágono 	7	7	7
Octágono 	8	8	8
Eneágono o nonágono 	9	9	9
Decágono 	10	10	10
Undecágono 	11	11	11
Dodecágono 	12	12	12

Los polígonos regulares se pueden trazar utilizando una circunferencia y surgen dos tipos de polígonos regulares:

Polígono inscrito: Un Polígono inscrito es el polígono que tiene sus vértices en una circunferencia.

Polígono circunscrito: Un Polígono circunscrito es aquel en el que sus lados son tangentes en una circunferencia.

Como podrás observar, el trazo del polígono está relacionado con la circunferencia, en el sentido de que el centro del polígono coincide con el centro de la circunferencia. Para dibujar un polígono se debe trazar una circunferencia, cuyo radio determina cada uno de los vértices del polígono al centro o a la distancia del punto medio de uno del segmento del polígono al centro de dicha circunferencia según sea el caso.

Actividades de Apertura

1. Investiga el trazo de un polígono inscrito y el de uno circunscrito. Y crea un mapa conceptual enseguida:

2. Investiga el trazo de un polígono inscrito y el de uno circunscrito y traza en tu cuaderno polígonos inscritos y circunscrito de 3,4,5, y 6 lados en la circunferencia de radio 5 cm.

Actividades de Desarrollo

1. Dibuja polígonos de 3,4,5,6,7 y 8 lados y en ellos traza todos los triángulos posibles sin que se traslapen (encimen). Encuentra una fórmula que relacione el número de triángulos con el número de lados.

2. En los polígonos dados en el punto 1, traza las diagonales de un vértice a los otros y determina una fórmula para calcular el número de diagonales que se pueden trazar de un solo vértice.

3. Realiza lo mismo que en el apartado anterior, pero ahora traza el total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices. Determina una expresión para el número total de diagonales que se pueden trazar de todos los vértices del polígono.

Actividades de cierre

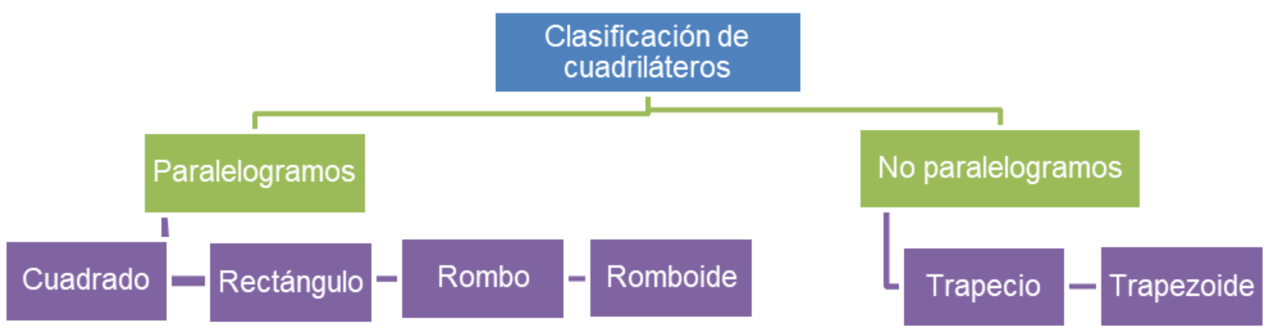
1. Considerando una circunferencia de radio 8, trace un octágono regular inscrito y uno circunscrito. Determina la medida de los ángulos interiores en base al número de triángulos que se pueden trazar dentro del polígono, sin que se encimen.

2. Traza un pentágono y marca en él un ángulo interno, uno externo y el total de diagonales que se pueden trazar.

1.4.1 Cuadriláteros, clasificación y propiedades

Introducción

Los **cuadriláteros** son polígonos de cuatro lados y la suma de sus ángulos interiores es igual a 360°. Los cuadriláteros tienen tres clasificaciones principales: paralelogramos, trapecios y trapezoides.



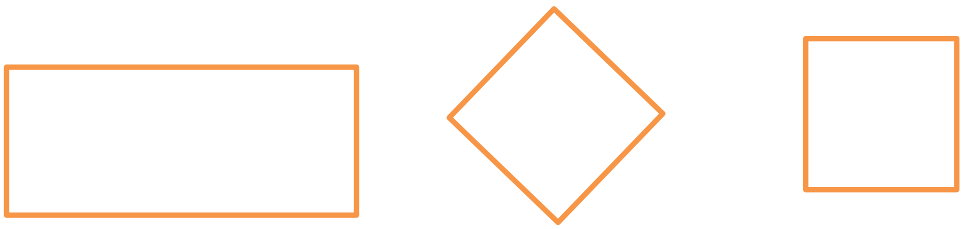
Paralelogramos

Un paralelogramo es un cuadrilátero que posee los lados paralelos dos a dos. Sus propiedades son:

- Lados opuestos son iguales
- Ángulos opuestos iguales y los consecutivos suplementarios
- Diagonales se cortan en su punto medio

Los paralelogramos son:

- **Rectángulo**: posee ángulos rectos y sus diagonales son iguales
- **Rombo**: posee lados iguales y diagonales perpendiculares
- **Cuadrado**: paralelogramo que es rectángulo y rombo a la vez. Posee lados iguales y ángulos rectos. Posee diagonales iguales (como rectángulo) y perpendiculares (como rombo)



Rectángulo Rombo Cuadrado

No paralelogramos

Son cuadriláteros con lados opuestos no paralelos. Tenemos dos tipos:

- **Trapecio**: cuadrilátero con dos lados paralelos y los otros dos no paralelos. Sus lados paralelos se denominan base mayor (B) y base menor (b). La distancia entre los lados paralelos se llama altura. Estos se subdividen en dos:
  - Trapecio Isósceles: cuando los lados no paralelos son iguales.
  - Trapecio rectángulo: cuando tiene dos ángulos rectos.
- **Trapezoide:** cuadrilátero que no tiene lados paralelos.

Trapecio Trapezoide

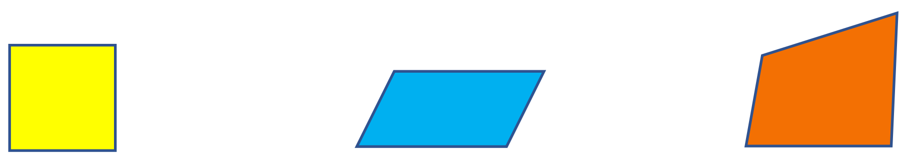
Actividades de Apertura

1. Contesta las siguientes preguntas

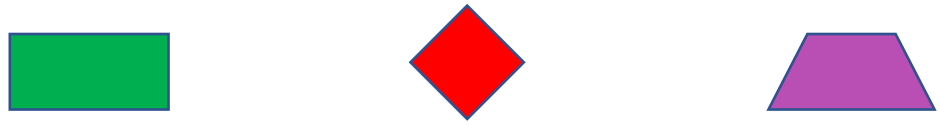
¿Cuáles son los elementos de un cuadrilátero?

¿Cuáles de esos elementos nos ofrecen criterios para clasificar a los cuadriláteros?

2. Coloca el nombre correspondiente al cuadrilátero de la figura.



______________ ______________ ______________



______________ ______________ ______________

Actividades de Desarrollo

1. Dibuja cada uno de los cuadriláteros, tanto los que sean paralelogramos como los no paralelogramos y escribe conclusiones acerca de las características de dichas diagonales.

2. Utiliza los dibujos anteriores para encontrar relaciones entre los ángulos y lados por separado y luego en conjunto.

3. Caracteriza cada uno de los cuadriláteros a partir de las diagonales y de los puntos medios. Es decir, qué han de cumplir las diagonales y los puntos medios para que el cuadrilátero sea:

   a) Cuadrado.

   b) Rectángulo

   c) Rombo

   d) Romboide

   e) Trapecio

   f) Trapezoide.

1.4.2 Número de diagonales, ángulos interiores y exteriores en polígonos de n lados

Introducción

En geometría, para comprenderla se parten de definiciones, y en este tema no será la excepción, para poder resolver problemas que atañen a polígonos regulares e irregulares es necesario partir de los distintos conceptos que definen los elementos particulares de los polígonos. Algunos de estos elementos son: vértices, lados, diagonales, ángulos interiores y exteriores.

En esta sección definiremos los elementos de un polígono y se emplearan por primera vez las fórmulas para determinar las diagonales de un polígono, ángulos interiores y exteriores. Por lo cual a continuación se presentan las definiciones necesarias para comprender el tema:

Polígono: Figura plana cerrada, delimitada por segmentos de recta.
Vértice: Punto donde concurren dos segmentos de recta llamados lados.
Lado: Segmento de recta que une dos vértices adyacentes.
Diagonal: Segmento de recta que une dos vértices no adyacentes.
Número de diagonales desde un mismo vértice: En un polígono de "*n*" lados se pueden trazar (n-3) diagonales, con lo cual la fórmula para calcular el número de diagonales es $d = n - 3$ **,** donde

d= número de diagonales trazadas desde un solo vértice.

n= número de lados.

Número total de diagonales en un polígono de *n* lados: El número total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices se determina con la formula $D = \frac{n(n-3)}{2}$, donde

D= número total de diagonales del polígono.

n= número de lados.

Ángulo interior: Es aquel que se forma con dos lados adyacentes de un polígono.

Ángulo interior de un polígono regular: Se determina con la formula $i = \frac{180°(n-2)}{n}$, donde

i= Medida del ángulo interior en grados.

n= número de lados.

Suma de ángulos interiores de cualquier polígono: Se determina con la formula $S_i = 180°(n-2)$, donde

S_i= Suma de ángulos interiores de cualquier polígono.

n= número de lados.

Ángulo exterior: Es aquel que se forma entre la prolongación de un lado y su lado adyacente.

Medida del ángulo exterior de un polígono regular: Se determina con la formula $e = \frac{360°}{n}$, donde

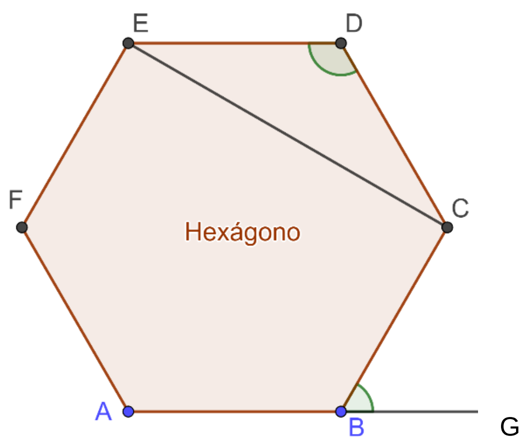
e= Ángulo exterior de un polígono regular.

n número de lados.

Suma de ángulos exteriores de cualquier polígono: siempre es igual a 360° y se representa como $S_e = 360°$, donde

S_e= Suma de ángulos exteriores de cualquier polígono.

Ejemplo 1: Observa la figura y determina al menos uno de cada uno de los elementos descritos anteriormente del hexágono.



Elementos del hexágono:

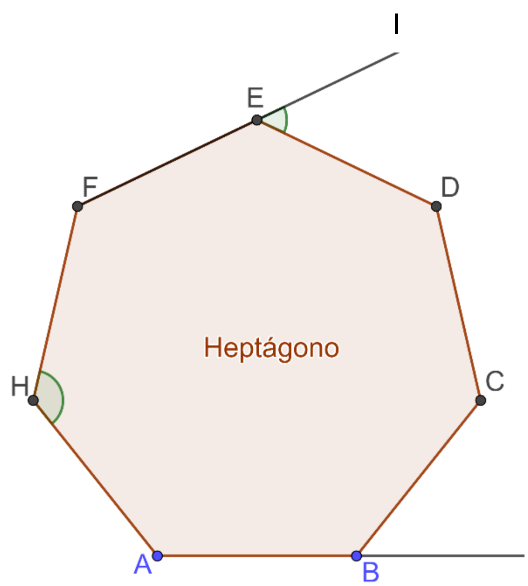
D= Vértice.

<CDE= Ángulo interior.

<CBG= Ángulo exterior.

Segmento AB= Lado.

Segmento CE= Diagonal.



Ejemplo 2: Observa la figura y determina al menos uno de cada uno de los elementos descritos anteriormente del heptágono.

Elementos del heptágono:

A= Vértice.

<AHF= Ángulo interior.

<IED= Ángulo exterior.

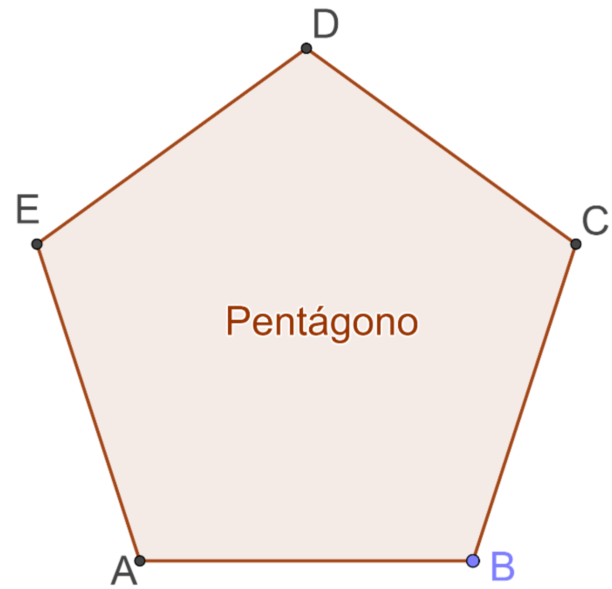
Segmento AB= Lado.

Segmento CF= Diagonal.

Actividades de Apertura

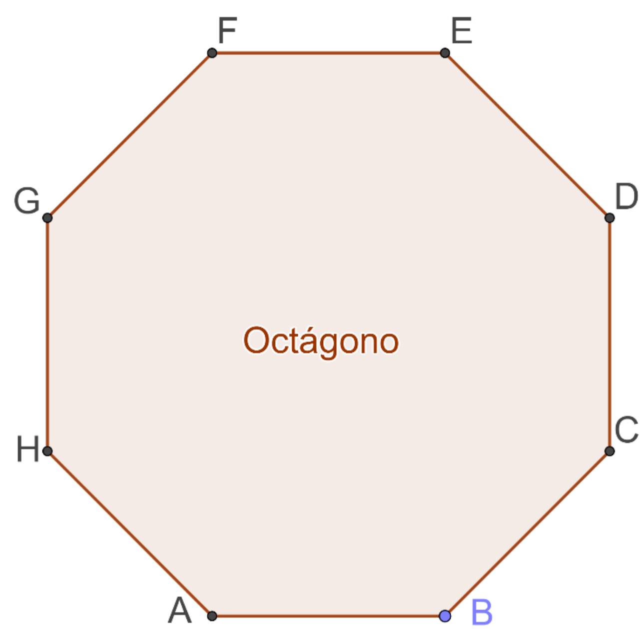
1.Con base en la figura traza y/o denota lo que se pide:

a) Dos lados.
b) Dos ángulos exteriores.
c) Dos ángulos internos.
d) Dos diagonales.
e) La circunferencia inscrita.



2. Con base en la figura traza y/o denota lo que se pide:

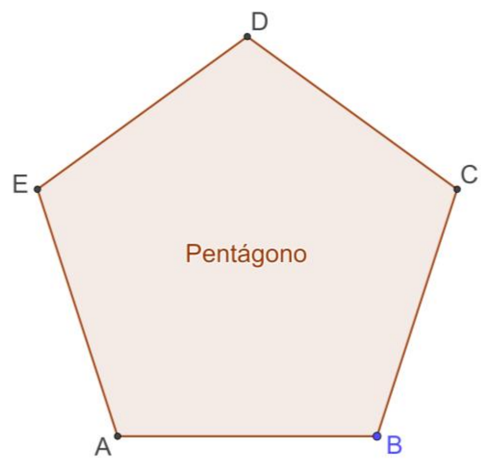
a) Dos lados.
b) Dos ángulos exteriores.
c) Dos ángulos internos.
d) Dos diagonales.
e) La circunferencia inscrita.
f) La circunferencia circunscrita.



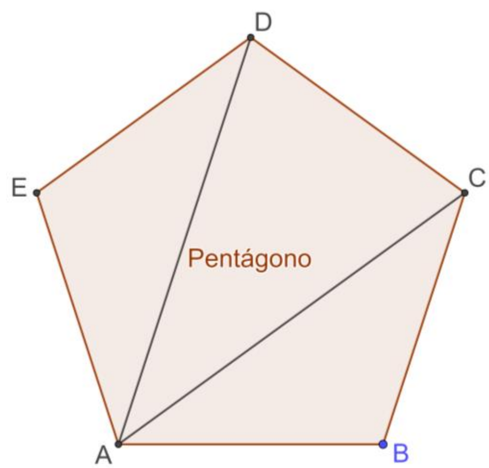
Actividades de Desarrollo

1. Analiza cada uno de los siguientes ejemplos para que puedas posteriormente determinar el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice, el número total de diagonales, el valor de los ángulos interiores y exteriores de los polígonos regulares.

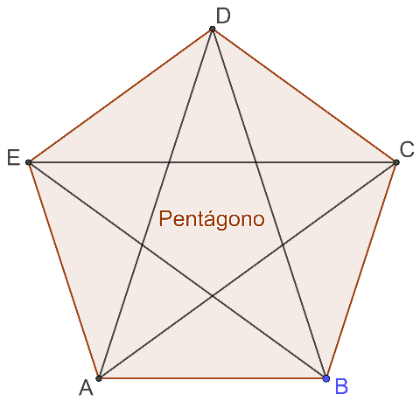
   Ejemplo 1: Pentágono



Número de diagonales desde un mismo vértice: Utilizando la fórmula para calcular el número de diagonales (**d=n-3**) se obtiene d=5-3=2. Para ejemplificar este resultado utilizaremos el vértice A



En la figura podemos observar las dos únicas diagonales posibles que se pueden trazar desde el vértice A, recuerda que una diagonal une vértices no adyacentes.



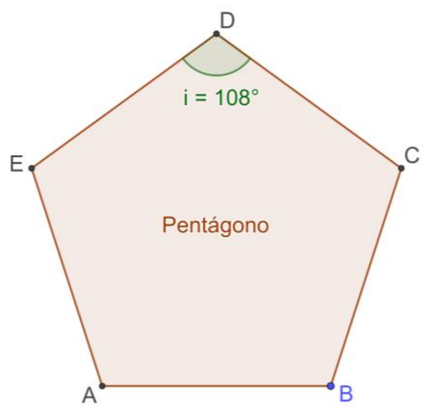
Número total de diagonales en el pentágono: El número total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices se determina con $D = \frac{n(n-3)}{2}$, recuerda que para este ejemplo *n* vale 5

$$D = \frac{5(5-3)}{2} = \frac{5(2)}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

En la figura podemos observar las 5 diagonales posibles que se pueden trazar desde todos los vértices, recuerda que una diagonal une vértices no adyacentes.

Para determinar el valor del ángulo interior de un pentágono regular (recuerda que en los polígonos regulares todos los ángulos interiores valen lo mismo) utilizaremos la formula $i = \frac{180°(n-2)}{n}$, al igual que en los cálculos anteriores n=5, entonces tenemos lo siguiente:

$$i = \frac{180°(5-2)}{5} = \frac{180°(3)}{5} = \frac{540°}{5} = 108°$$



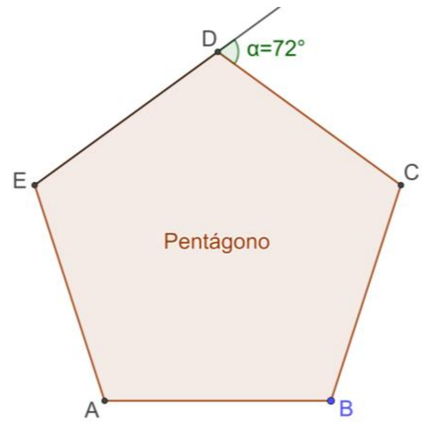
La suma de los ángulos interiores del pentágono se determina con la formula

$S_i = 180°(n-2)$, donde n=5

$$S_i = 180°(5-2) = 180°(3) = 540°$$

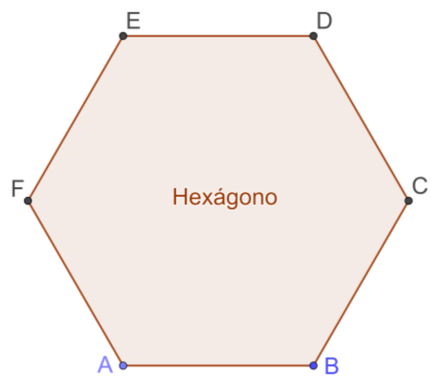
El valor del ángulo exterior de un pentágono se determina con la formula $e = \frac{360°}{n}$, donde nuevamente n=5:

$$e = \frac{360°}{5} = 72°$$

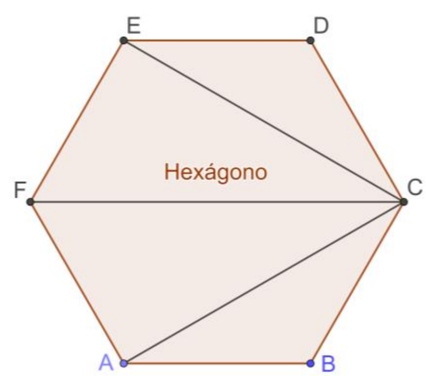


Para finalizar no olvides que la suma de ángulos exteriores de cualquier polígono siempre es igual a 360° y se representa como $S_e = 360°$.

Ejemplo 2: Hexágono

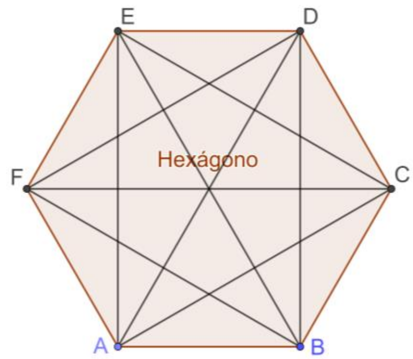


Número de diagonales desde un mismo vértice: Utilizando la fórmula para calcular el número de diagonales (**d=n-3**) se obtiene d=6-3=3. Para ejemplificar este resultado utilizaremos el vértice C



En la figura podemos observar las tres únicas diagonales posibles que se pueden trazar desde el vértice C, recuerda que una diagonal une vértices no adyacentes.
Número total de diagonales en el hexágono: El número total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices se determina con la formula $D = \frac{n(n-3)}{2}$, recuerda que para este ejemplo n vale 6

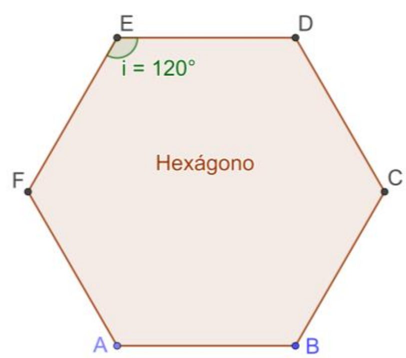
$$D = \frac{6(6-3)}{2} = \frac{6(3)}{2} = \frac{18}{2} = 9$$



En la figura podemos observar las 9 diagonales posibles que se pueden trazar desde todos los vértices, recuerda que una diagonal une vértices no adyacentes.

Para determinar el valor del ángulo interior de un hexágono regular (recuerda que en los polígonos regulares todos los ángulos interiores valen lo mismo) utilizaremos la formula $i = \frac{180°(n-2)}{n}$, al igual que en los cálculos anteriores n=6, entonces tenemos lo siguiente:

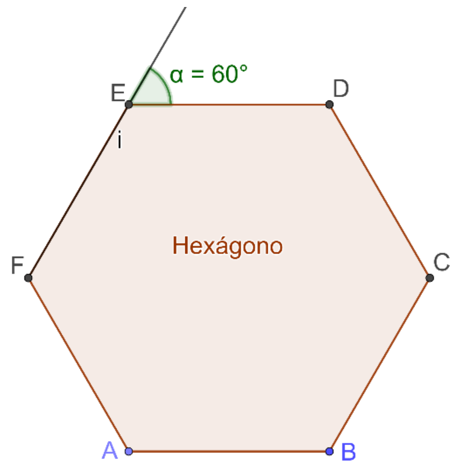
$$i = \frac{180°(6-2)}{6} = \frac{180°(4)}{6} = \frac{720°}{6} = 120°$$



La suma de los ángulos interiores del hexágono se determina con la formula

$S_i = 180°(n-2)$, donde n=6

$$S_i = 180°(6-2) = 180°(4) = 720°$$



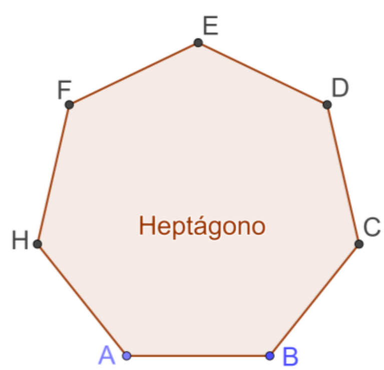
El valor del ángulo exterior de un hexágono se determina con la formula $e = \frac{360°}{n}$, donde nuevamente n=6:

$$e = \frac{360°}{6} = 60°$$

Para finalizar no olvides que la suma de ángulos exteriores de cualquier polígono siempre es igual a 360° y se representa como $S_e = 360°$.

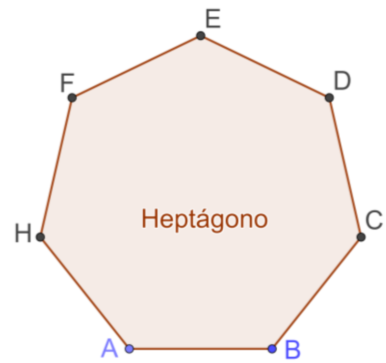
Resuelve el siguiente problema:

Problema 1: Heptágono



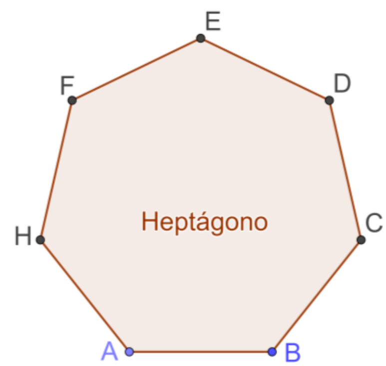
Número de diagonales desde un mismo vértice: Utilizando la fórmula para calcular el número de diagonales (**d=n-3**) y como referencia para el trazo el vértice E

En la figura traza las diagonales posibles que se pueden trazar desde el vértice E, recuerda que una diagonal une vértices no adyacentes.

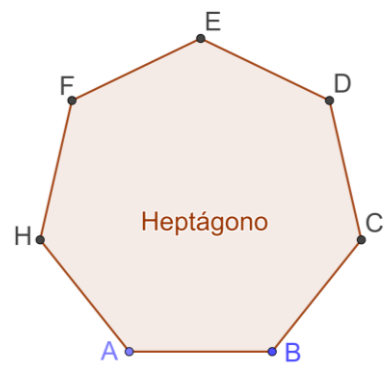


Número total de diagonales en el heptágono: El número total de diagonales que se pueden trazar desde todos los vértices se determina con la formula $D = \frac{n(n-3)}{2}$, recuerda que para este ejemplo n vale 7

En la figura traza todas las diagonales posibles que se pueden trazar desde todos los vértices, recuerda que una diagonal une vértices no adyacentes.



Para determinar el valor del ángulo interior de un heptágono regular (recuerda que en los polígonos regulares todos los ángulos interiores valen lo mismo) utilizaremos la formula $i = \frac{180°(n-2)}{n}$, al igual que en los cálculos anteriores n=7, coloca el valor que obtuviste en la figura:



La suma de los ángulos interiores del heptágono se determina con la formula

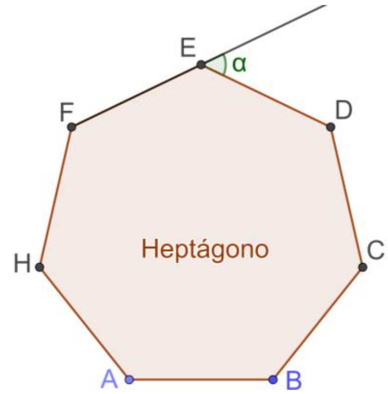
$S_i = 180°(n-2)$, donde n=7

$$S_i =$$

El valor del ángulo exterior de un heptágono se determina con la formula $e = \frac{360°}{n}$, donde nuevamente n=7:

$$e =$$

Coloca en la figura tu resultado:



Para finalizar no olvides que la suma de ángulos exteriores de cualquier polígono siempre es igual a 360° y se representa como $S_e = 360°$.

2. Completa la siguiente tabla para los polígonos dados.

Polígono.	Número de diagonales desde un solo vértice.	Número total de diagonales del polígono.	Valor del ángulo interior del polígono.	Suma de los ángulos interiores del polígono.	Valor del ángulo exterior
Octágono					
Eneágono					
Decágono					

Actividades de cierre

1. Hasta el momento hemos realizado problemas donde la aplicación de las fórmulas correspondientes ha sido de forma directa, en este apartado ejercitaras nuevamente el concepto del despeje, así como el de resolución de ecuaciones de segundo grado para poder dar solución a los problemas presentados en este apartado. Realiza la lectura analítica de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: ¿Cuál es el polígono que tiene un total de 27 diagonales trazadas en conjunto de todos los vértices?

En esta parte después de analizar la información del problema se concluye que el dato que nos proporcionan es *D*=27, por lo cual utilizando la fórmula para determinar el total de diagonales que se pueden trazar en un polígono ($D = \frac{n(n-3)}{2}$) podemos determinar de qué polígono se pueden trazar esta cantidad de diagonales totales.

Paso 1: sustituimos el valor de D en la fórmula, $27 = \frac{n(n-3)}{2}$

Paso 2: despejamos del miembro derecho a n(n-3), pasando al dos multiplicando al 27: $(27)(2) = n(n-3)$

Paso 3: realiza las multiplicaciones indicadas: $54 = n^2 - 3n$

Paso 4: iguala la ecuación a cero: $n^2 - 3n - 54 = 0$

El paso 5: resolver la ecuación, pero en este punto tenemos que recordar que para lograr esto hay en ocasiones más de una forma de lograrlo, vamos a realizar las dos formas posibles en este problema para que tú decidas cual es la que más te acomoda como estrategia de solución.

Forma 1: Por factorización, el trinomio $n^2 - 3n - 54 = 0$ se puede comparar con el caso general $x^2 + Bx + C = 0$, en el cual se pueden ensayar buscar dos números, a y b tales que $B = a + b$ y $C = ab$. En otras palabras, dos números que sumados den B y multiplicados den como resultado C.

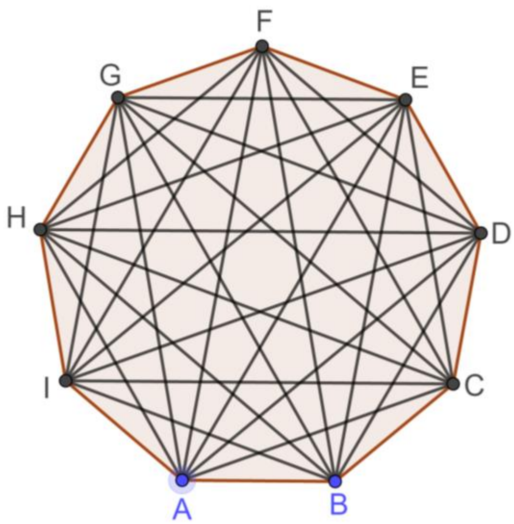
Para este caso particular $B = -3$ y $C = -54$, entonces los numero que pueden cumplir esas condiciones son $a = -9\, y\, b = 6$, tales que *B*=-9+6=3 y *C*= (-9)(6)=-54, con lo cual tenemos que $(n-9)(n+6) = 0$, de donde se concluye que:

$n-9=0\ y\ n+6=0$ de donde $n=9\ y\ n=-6$, por lo tanto, se concluye que el polígono que cumple con las condiciones del problema es el Nonágono (Eneágono), pues un polígono no puede tener un número negativo de lados. Tampoco puede tener un número de lados que sea una fracción o decimal.

Forma 2: Utilizando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas.

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, con a=1, b=-3 y c=-54. Comprueba que el resultado es el mismo que con el método anterior.

Diagonales totales del Nonágono



Ejemplo 2: ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 10 diagonales desde un solo vértice?

En esta parte después de analizar la información del problema se concluye que el dato que nos proporcionan es *d*=10, por lo cual utilizando la fórmula para determinar el total de diagonales que se pueden trazar desde un solo vértice (d= $n-3$) podemos determinar de qué polígono se pueden trazar esta cantidad de diagonales totales.

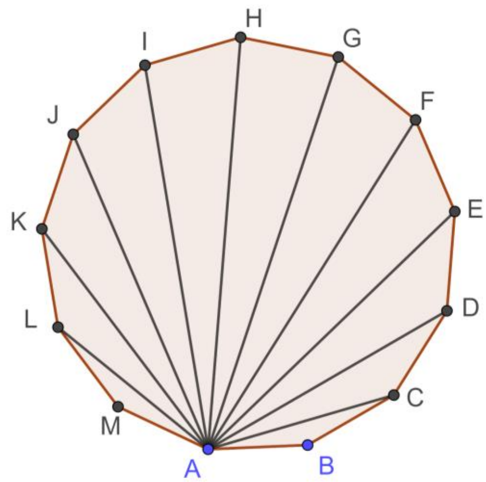
Paso 1: sustituimos el valor de D en la fórmula, $10 = n - 3$.

Paso 2: despejamos del miembro derecho a n, pasando al -3 sumando al 10,

$10 + 3 = n$.

Paso 3: realiza las operaciones indicadas, $13 = n$.

Por lo tanto, el polígono del que hablamos es el Tridecágono.



Ejemplo 3:_Se podrá construir un polígono regular cuyo ángulo interior mida 170°, si es esto posible, ¿Cuál es el polígono del que hablamos?

En esta parte después de analizar la información del problema se concluye que el dato que nos proporcionan es *i=170°*, por lo cual utilizando la fórmula para determinar el valor del ángulo interior de un polígono regular ($i = \frac{180°(n-2)}{n}$) podemos determinar de qué polígono se trata.

Paso 1, sustituimos el valor de i en la fórmula, $170 = \frac{180°(n-2)}{n}$.

Paso 2, despejamos del miembro derecho a n, pasando primero la n que divide multiplicando al 170, $(170)(n) = 180°(n-2)$

Paso 3, realiza las operaciones indicadas, $170n = 180n - 360$.

Paso 4, trasponiendo términos, en este caso 180n, $170n - 180n = -360$

Paso 5, realiza las operaciones indicadas, $-10n = -360$.

Paso 6, despejamos del izquierdo a n, $n = \frac{-360}{-10} = 36$ Por lo tanto, es el Triacontakaihexágono

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) ¿Cuántas Diagonales se pueden trazar desde un solo vértice de un Nonadecágono?
b) ¿Cuál es el polígono en el que se puede trazar 20 diagonales desde un solo vértice?
c) ¿Cuál es el polígono en el que se puede trazar 9 diagonales desde un solo vértice?
d) ¿Cuál es el polígono en el que se puede trazar 15 diagonales desde un solo vértice?
e) ¿Cuántas Diagonales se pueden trazar desde un solo vértice de un Icosakaidígono?
f) ¿Cuántas Diagonales se pueden trazar desde un solo vértice de un Eneacontakaihexágono?
g) Se podrá construir un polígono regular cuyo ángulo interior mida 210°, si es esto posible, ¿Cuál es el polígono del que hablamos?
h) Se podrá construir un polígono regular cuyo ángulo interior mida 220°, si es esto posible, ¿Cuál es el polígono del que hablamos?

Bloque 2 | Relaciones y funciones en el triángulo

2.1 Razones trigonométricas

2.1.1 Razones entre los lados de un triángulo rectángulo y sus denominaciones.

Introducción

Todo triángulo que tiene un ángulo recto, es decir, que mide 90 grados, es un triángulo rectángulo. Si un triángulo no es rectángulo, decimos que es un triángulo oblicuángulo.

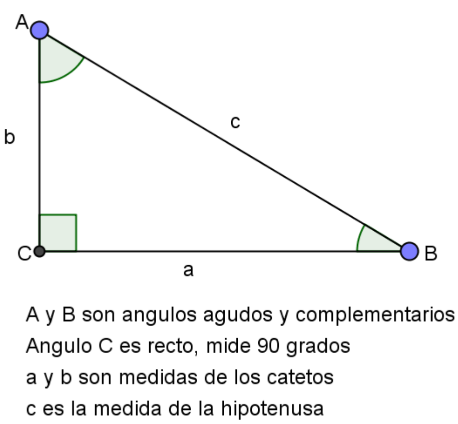


Figura 1.1. Elementos de un triángulo Rectángulo.

Los lados que forman el ángulo recto del triángulo rectángulo se denominan catetos y el lado opuesto a dicho ángulo es la hipotenusa.

Una relación muy importante entre los lados del triángulo rectángulo que fue descubierta por los antiguos griegos hace ya más de 2000 años es el Teorema de Pitágoras, cuyo enunciado es:

"*El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*".

Esta relación expresada algebraicamente se escribe:

$c^2 = a^2 + b^2$ Donde c es la medida de la hipotenusa, a y b son las medidas de los catetos.

La utilidad del teorema de Pitágoras es que sirve para calcular cualquier lado desconocido, si se conocen los otros dos lados, despejando el lado que se desconozca. Si despejamos c:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, si despejamos a:

$a^2 = c^2 - b^2$ y obteniendo la raíz cuadrada a ambos lados $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Para despejar b se sigue un proceso similar.

En todo triangulo rectángulo, la hipotenusa es el lado mayor. Puedes utilizar este hecho para comprobar tus cálculos al resolver este tipo de triángulos, pues si la hipotenusa resulta menor que cualquiera de los catetos es seguro que te has equivocado en alguna parte del proceso.

Recuerda que, en un triángulo rectángulo, uno de los ángulos mide 90º y, consecuentemente, los dos ángulos (agudos) restantes deben sumar 90º, esta es la principal propiedad de los triángulos rectángulos

Otras relaciones importantes en los triángulos rectángulos son las razones que se establecen entre la medida de sus lados. **Una razón** es la comparación entre dos cantidades mediante un cociente (división). La razón nos indica cuantas veces el valor de una cantidad iguala a la otra.

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma y para ello deben tener sus ángulos interiores de la misma medida.

Las razones entre los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son equivalentes, es decir, tienen el mismo valor.

Un lado de un triángulo es correspondiente a otro, en otro triangulo semejante, si se oponen (están enfrente) a ángulos de igual medida.

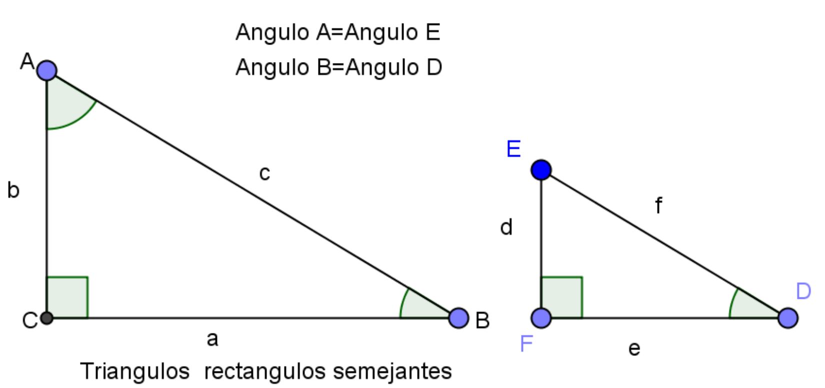
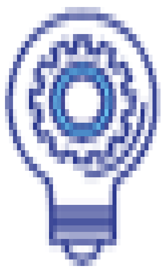


Figura 1.2 Triángulos semejantes

En el caso de los triángulos rectángulos, si uno de los ángulos agudos es igual en ellos, los triángulos serán semejantes forzosamente, puesto que tendrán sus tres ángulos iguales, ya que el otro ángulo agudo será complementario y por definición todos los triángulos tienen un ángulo recto.

Entonces si se conoce una razón entre los lados de un triángulo rectángulo y sabemos que otros triángulos rectángulos tienen el mismo ángulo agudo, significa que esa misma razón se cumplirá entre los lados correspondientes en los demás triángulos.



Consideremos los triángulos semejantes ABC y EDF, si comparamos el cateto cuya medida es b, con el cateto cuya medida es a, la razón es $\frac{a}{b}$. Si comparamos los lados correspondientes en el triángulo EDF, vemos que la razón equivalente a la anterior es $\frac{e}{d}$ ya que el cateto con medida *e*, es el correspondiente al cateto de medida a y el cateto de medida *d* se corresponde con *b*.

Entonces, al ser semejantes los triángulos, estas razones valen lo mismo y podemos formar la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{d}$$

Lo anterior es válido para razones cualesquiera que se formen entre las medidas de pares de lados correspondientes en triángulos semejantes.

La clave de la utilidad de estas razones radica en que todos los triángulos rectángulos que tengan un mismo ángulo agudo serán semejantes, entonces, si tengo un registro de los valores de las razones para un ángulo agudo determinado, puedo usar ese valor para calcular el lado faltante en la proporción, pues al conocer el valor de la razón y uno de los lados del triángulo a resolver, fácilmente puedo despejar el lado faltante:

Ejemplo 1: se sabe que cuando un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30 grados, la hipotenusa mide el doble de la medida de uno de los catetos, entonces, si me dicen que, en un triángulo con esta condición, **el cateto adecuado** mide 4, entonces la hipotenusa mide 8.

¿Por qué decimos que debe ser el cateto adecuado para que lo anterior sea válido?

Recuerda que los triángulos rectángulos tienen dos catetos, entonces, si estos tienen distinta medida, la hipotenusa no puede ser el doble de dos cantidades distintas. El cateto adecuado para hacer el cálculo anterior es el que no forma parte del ángulo de 30 grados, al cual denominamos cateto opuesto. El otro cateto seria el adyacente. De esta manera diferenciamos un cateto del otro al ver cómo está relacionado cada cateto con el ángulo de interés. Ver figura 1.3

Entonces, para el ángulo de 30 grados se tiene que:

$$\frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = 2$$

de donde $hipotenusa = 2(cateto\ opuesto) = 2(4) = 8$

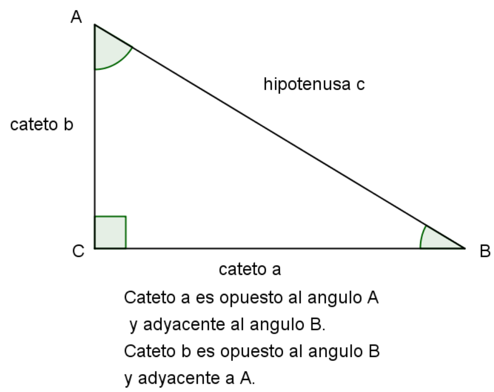


Figura 1.3. Relación entre catetos y ángulos.

De esta manera se tienen seis posibles razones entre los tres lados de un triángulo y en el caso de triangulo rectángulo a cada una se le asigna un nombre, estableciéndose así las seis razones trigonométricas utilizadas de la manera antes dicha para resolver triángulos rectángulos.

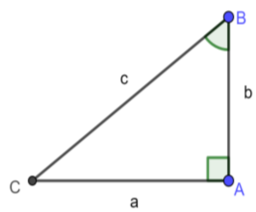
Ejemplo 2: Si consideras un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a=6 y b=7. ¿Cuáles serán los valores de las razones trigonométricas de sus lados?

Las seis razones son $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$. Para encontrar sus valores solo debes sustituir los valores de las medidas de los lados, por lo que debes darte cuente que hace falta conocer la medida **c** de la hipotenusa. Para calcular la medida de la hipotenusa se utiliza el teorema de Pitágoras.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85} = 9.2195$

c=9.2195. Entonces los valores pedidos (redondeados) de las razones son:

$$\frac{a}{b}=\frac{6}{7}=0.85714,\quad \frac{a}{c}=\frac{6}{9.2195}=0.65079,\quad \frac{b}{c}=\frac{7}{9.2195}=0.75926,\quad \frac{b}{a}=\frac{7}{6}=1.16667,$$
$$\frac{c}{a}=\frac{9.2195}{6}=1.53658,\quad \frac{c}{b}=\frac{9.2195}{7}=1.31707$$



Si tomas como referencia el ángulo B, **a** es el cateto opuesto, **b** el cateto adyacente y **c** , obvio , es la hipotenusa, entonces las razones anteriores toman los nombres especiales que a continuación se expresan.

$$\frac{a}{b}=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}=Tangente\ B=\frac{6}{7}$$
$$\frac{a}{c}=\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}=seno\ B=\frac{6}{9.2195},$$
$$\frac{b}{c}=\frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}=Coseno\ B=\frac{7}{9.2195},$$
$$\frac{b}{a}=\frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}=cotangente\ B=\frac{7}{6},$$
$$\frac{c}{a}=\frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}=Cosecante\ B=\frac{92195}{6},$$
$$\frac{c}{b}=\frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}=secante\ B=\frac{9.2195}{7}$$

Si conoces los valores de alguna razón trigonométrica de un ángulo agudo del triángulo rectángulo puedes calcular facilmente la medida de dicho ángulo usando la función inversa del ángulo en la calculadora científica.

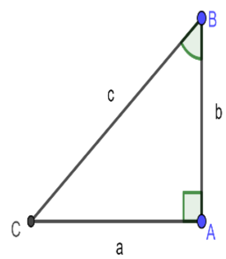
Por ejemplo, la tangente del ángulo B vale 6/7=0.85714, entonces:

la medida del ángulo B=tan^{-1}(0.85714)=40.6012 grados=40°36´04”

Si utilizamos el valor del $seno\ B = \frac{6}{9.2195}$=0.65079, entonces B= sen^{-1}(0.65079)=40.6012 grados, es decir, el mismo resultado.

Se obtendría el mismo resultado si utilizas el valor del coseno de B.

Ejemplo 3: Considera ahora un triángulo en el cual se conoce solamente el valor de la hipotenusa c=12 y la medida de uno de los ángulos, digamos el ángulo B=25°. ¿ Cómo puedes utilizar las razones trigonométricas para calcular los lados faltantes (catetos)?



Para ello puedes usar una razón del ángulo B que tome en cuenta un lado conocido y uno que necesites conocer. Como tienes el valor de la hipotenusa, supongamos que deseas el valor del cateto adyacente a B.Entonces la razón que debes utilizar es la que en su definicón contemple la hipotenusa y el cateto adyacente. Hay dos razones que contemplan estos lados: secante y coseno. Los valores de las razones seno , coseno y tangente de cualquier ángulo se obtienen directamente de la calculadora. Como la secante no se obtiene con la calculadora, debes usar el coseno del ángulo B.

Cos B=$\frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}$

Como B= 25 °, entonces , $Cos\ 25° = \frac{b}{12}$

Despejando b: b=12(cos 25°)

Obteniendo el coseno con la calculadora: b=12(0.90631) =10.876 unidades

Para encontrar el cateto a, opuesto al ángulo B, la razón a utilizar es seno B=$\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$

Entonces, $Sen\ 25° = \frac{a}{12}$, de donde a=12(sen 25°)=12(0,42262)=5.071 unidades.

La medida del ángulo A faltante se puede sacar por diferencia, dado que sumando las medidas de A y B deben dar 90 grados. Así, A=65°.

Esperamos que con la realización de las actividades siguientes puedas aprender las definiciones de dichas razones y sus nombres, para usarlas posteriormente en la solución de problemas.

Actividades de Apertura

1. Dibuja en tu cuaderno a mano o laptop utilizando Geogebra, los triángulos rectángulos cuyas medidas se dan a continuación.

Triángulo 1: Catetos: a=5 y b=10 cm

Triángulo 2: Catetos: a=6 y b=12 cm

Triángulo 3: Catetos: a=8 y b=16 cm.

2. Con la información dada, calcule las cantidades que se piden para cada triángulo recordando los elementos de un triángulo rectángulo y las relaciones entre sus lados. Después de llenar la tabla, compruebe el valor de c, la hipotenusa, midiéndola en su dibujo o con la herramienta de Geogebra.

No. de triángulo	a	b	c	a/b	a/c	b/c
Triángulo 1						
Triángulo 2						
Triángulo 3						

¿Qué observas con respecto a las razones correspondientes de los lados de los tres triángulos?

¿Por qué razón se da esta característica?

¿Qué otras razones se pueden calcular?

3. Ahora, considera los triángulos anteriores y tome como referencia el ángulo B que forma la hipotenusa con el cateto menor, para llenar la siguiente tabla con los valores de todas las posibles razones que se pueden formar con los lados de cualquier triángulo rectángulo.

No. de triangulo	$\frac{cat.opuesto}{hip.}$	$\frac{cat.adyacente}{hip.}$	$\frac{cat.opuesto}{cat.adyacente}$	$\frac{cat.adyacente}{cat.opuesto}$	$\frac{hip.}{cat.adyacente}$	$\frac{hip.}{cat.opuesto}$
Triangulo 1						
Triangulo 2						
Triangulo 3						

Actividades de Desarrollo

1. Realiza las siguientes actividades:

a) Llena la tabla siguiente, para las mismas razones, pero ahora tomando como referencia el ángulo A, formado por el cateto mayor y la hipotenusa.

No. de triangulo	$\frac{cat.opuesto}{hip.}$	$\frac{cat.adyacente}{hip.}$	$\frac{cat.opuesto}{cat.adyacente}$	$\frac{cat.adyacente}{cat.opuesto}$	$\frac{hip.}{cat.adyacente}$	$\frac{hip.}{cat.opuesto}$
Triangulo 1						
Triangulo 2						
Triangulo 3						

b) Investiga el nombre que identifica cada una de las seis razones dadas en las tablas anteriores.

_____________, _____________, _____________, _____________, _____________ y ______________

c) ¿Qué relación encuentras entre los valores de las razones de los lados, para cada uno de los triángulos?

d) ¿Cómo son los triángulos entre sí?

e) ¿Cómo puedes calcular la medida del ángulo, cuando conoces sus razones trigonométricas?

f) Calcula la medida del ángulo A y B de los triángulos usando el seno, coseno y tangente.

g) Dibuja los tres triángulos de manera que queden los más pequeños dentro de los más grandes.

h) Dibuja otros tres triángulos semejantes a los anteriores, dentro del mismo dibujo, es decir, que todos tengan un ángulo en común y determina mediante medición, los valores que se piden en la siguiente tabla. Toma los nombres de los lados de los nuevos triángulos iguales a los correspondientes a los triángulos dados al inicio de la actividad.

No. de triángulo.	a	b	c	a/b	a/c	b/c
Triángulo 1						
Triángulo 2						
Triángulo 3						

Actividades de cierre

1) Con la información dada en la tabla, calcula la información faltante de las siguientes tablas:

No. de triángulo.	a	b	c	a/b	a/c	b/c	A
Triángulo 1	6	14					
Triángulo 2	8			1 / 2			
Triángulo 3			30				50°
Triángulo 4		12	20				

No. de triángulo.	a	b	c	Tangente A	Coseno A	Seno A	B
Triángulo 1		14	20				
Triángulo 2	10			4			
Triángulo 3			30		0.6420		
Triángulo 4			20				28°

Actividades de contexto o Transversales

1. Realiza la siguiente actividad con lo revisado en el tema:

Se desea construir un plano inclinado de madera, para subir carretillas con mezcla de cemento hasta una altura de 1.5 metros. La distancia horizontal desde donde empieza a elevarse hasta la parte más alta es de 4 metros y el ancho es de 1 metro. La superficie de rodadura del plano será una plancha de triplay de ¾ de grosor. Las partes laterales del plano y el plano de rodado se harán con barrotes de madera de 2x2 pulgadas. Como refuerzos del marco del plano se colocarán barrotes de la misma medida como soportes verticales y horizontales cada medio metro y transversales como se muestra en la figura. (La figura 1.4 solo muestra las posiciones de los barrotes no la cantidad de estos)

a) Calcular el ángulo de inclinación del plano inclinado o rampa
b) Calcular la cantidad de madera necesaria para hacer cada cara lateral del plano.
c) Calcular la superficie de rodado del plano.
d) Calcular el costo de la madera necesaria para hacer la rampa. El costo de la madera es de 15 pesos / pie cúbico.

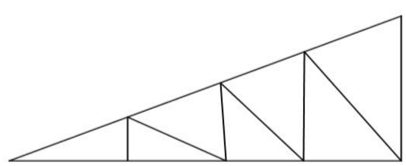
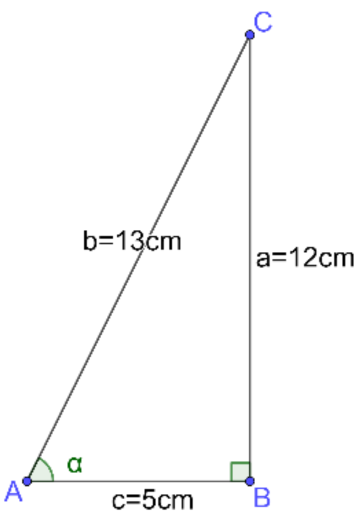


Figura 1.4 Plano inclinado

Ejercicios Adicionales

Completa los elementos solicitados en los siguientes triángulos rectángulos:

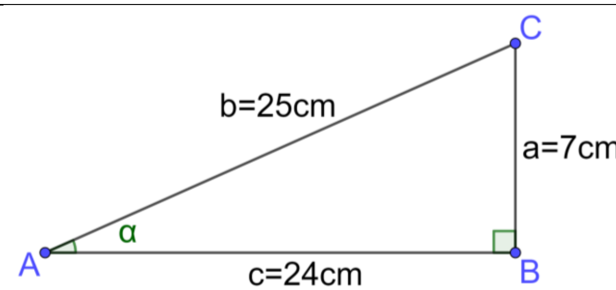


1. Tomando como referencia el ángulo α, calcula las siguientes relaciones y la medida de los ángulos dados:

Sen β =________.   Tan β =_____________.

Cos β =________.   Sec β =______________.

Tan β =________.   Csc β =______________.

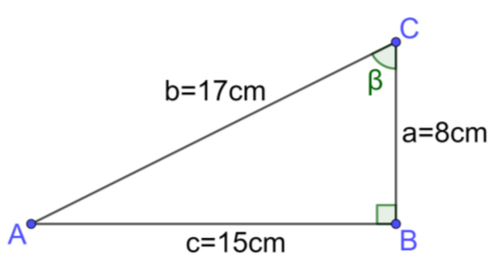


2. Tomando como referencia el ángulo β, calcula las siguientes relaciones y la medida de los ángulos dados:

Sen β =__________.   Tan β =________________.

Cos β =__________.   Sec β =________________.

Tan β =__________.   Csc β =________________.



3. Tomando como referencia el ángulo β, calcula las siguientes relaciones:

Sen β =_______.   Tan β = _______.

Cos β = _______.   Sec β = _______.

Tan β = _______.   Csc β = _______.

4. En el siguiente espacio haz un boceto de un triángulo con las siguientes medidas:

Cateto a =	33mm
Hipotenusa =	65mm
Cateto b=	56mm

Tomando como referencia el ángulo formado por la unión del cateto b y la hipotenusa, calcula:

Sen β =__________.   Tan β =________________.

Cos β =__________.   Sec β =________________.

Tan β =__________.   Csc β =________________.

2.1.2 Resolución de triángulos rectángulos

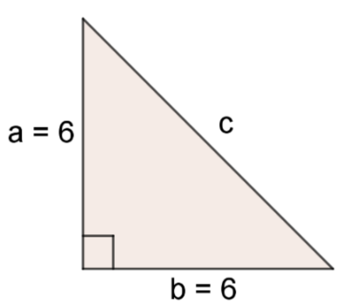
Introducción

Anteriormente mencionamos que el Teorema de Pitágoras es una herramienta útil para resolver triángulos, cuando conocemos las medidas de dos de sus lados y se requiere encontrar el lado faltante. Para usar el teorema de Pitágoras en la solución de problemas, se debe interpretar la situación planteada y representarla mediante un triángulo rectángulo.

Una aplicación muy antigua del teorema mencionado consiste en escuadrar una habitación cuando se va a construir de forma que las paredes formen un cuadrado o rectángulo. Los albañiles saben empíricamente que para trazar un ángulo recto deben medir segmentos de 4 y 3 metros unidos en sus extremos y luego abrir el ángulo hasta que la distancia entre los otros extremos sea de 5 metros. De esta manera se garantiza que las paredes quedaran escuadradas.

Otra aplicación es la determinación del alcance de una escalera cuando se apoya en una pared vertical y en un piso horizontal o a que distancia de la pared se debe apoyar para llegar a una altura deseada y posible para la longitud de la escalera.

En los siguientes triángulos rectángulos, se ejemplifica la determinación de los lados faltantes en un triángulo rectángulo dado.



Ejemplo 1

Recuerda: el teorema de Pitágoras se enuncia de la siguiente manera:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

en donde a y b son catetos y c la hipotenusa.

En este ejemplo aprenderás a calcular el valor de la hipotenusa paso a paso.

1. Primero utilizaremos nuestra fórmula del Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. Posteriormente realizaremos la sustitución de los valores conocidos, después de sustituir los valores, nuestra fórmula nos queda de la siguiente manera:

$$c^2 = 6^2 + 6^2$$

3. Para poder obtener el valor de c y no el de c^2 tendremos que obtener su raíz cuadrada, pero recuerda que si afectamos un lado de la igualdad, tendremos que afectar de la misma manera al otro lado de la igualdad.

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

4. Para obtener la siguiente expresión algebraica

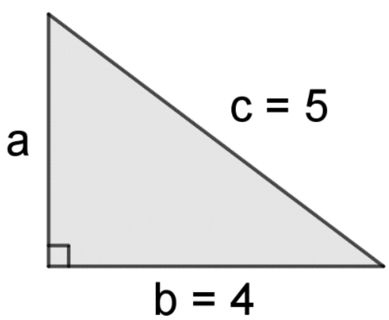
$$c = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

5. Por último, realizaremos las operaciones correspondientes para finalmente determinar el valor de la incógnita.

$$c = \sqrt{36 + 36}$$

$$c = \sqrt{72}$$

$$c = 8.49$$



Ejemplo 2

Aquí tienes otro ejemplo, como ahora cuentas con los datos de la hipotenusa y un cateto, debes determinar el valor del otro cateto.

1. Iniciamos de nuevo con la fórmula del teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. Ahora es necesario despejar el cateto a, para lo cual restamos b^2 en ambos lados de la ecuación.

$$c^2 \cancel{- b^2} = a^2 + b^2 \cancel{- b^2}$$

3. Observa que en lado derecho de la ecuación al restar b^2 se obtiene cero, además podemos invertir la ecuación.

$$c^2 - b^2 = a^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$

4. Para poder obtener el valor de a y no el de a^2 tendremos que obtener su raíz cuadrada, pero recuerda que, si afectamos un lado de la igualdad, tendremos que afectar de la misma manera al otro lado de la igualdad.

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$$

5. Quedando finalmente así:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

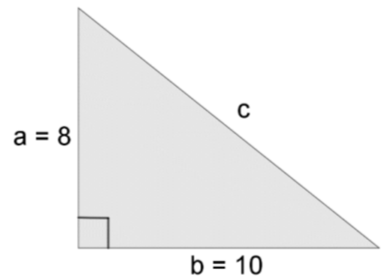
6. Sustituyendo los valores:

$$a = \sqrt{5^2 - 4^2}$$
$$a = \sqrt{25 - 16}$$
$$a = \sqrt{9}$$
$$a = 3$$

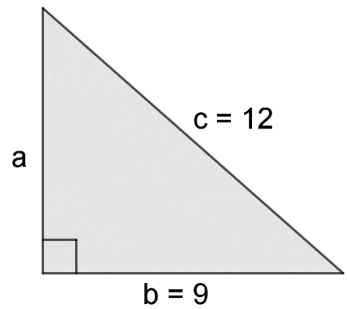
Actividades de Apertura

1. Resuelve los siguientes ejercicios:

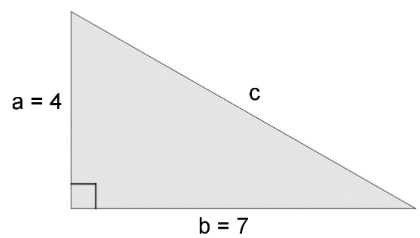
a) Determina el valor de c



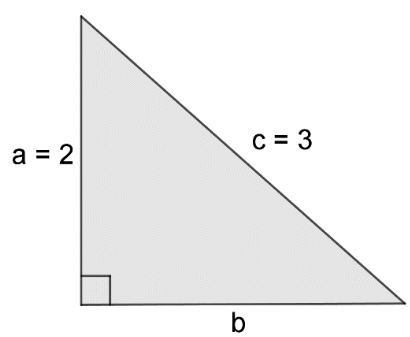
b) Determina el valor de a



c) Determina el valor de c



d) Determina el valor de b



Actividades de Desarrollo

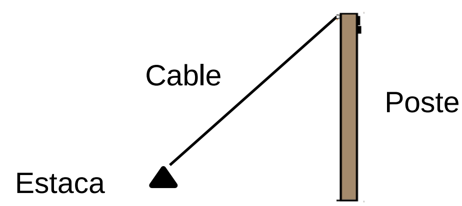
Ahora continuaremos con algunos ejemplos donde podemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

Ejemplo 1:

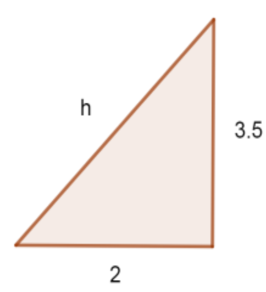
Queremos fijar un poste de 3.5 m de altura a una estaca que se encuentra a 2 m de distancia, con un tirante que se extiende desde el extremo superior del poste hasta la estaca. ¿Cuántos metros de cable utilizaremos?

Procedimiento:

1. Para este ejercicio comenzamos trazando un dibujo que represente lo establecido en el texto



2. Anotamos el valor de cada una las partes mencionadas en un triángulo



3. Observamos qué datos tenemos y comenzamos a sustituir en la fórmula del Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 3.5^2 + 2^2$$

4. Resolvemos:

$$c^2 = 3.5^2 + 2^2$$
$$c^2 = 12.25^2 + 4$$
$$c^2 = 16.25$$
$$c^2 = \sqrt{16.25}$$
$$c^2 = 4.03$$

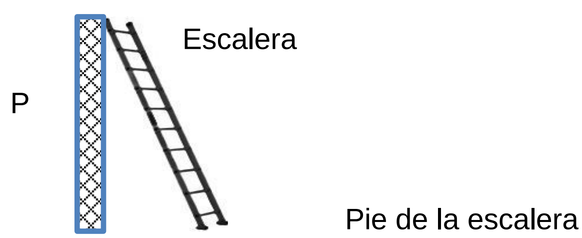
Necesitamos 4.03 metros de cable para poder sostener el poste al suelo

Ejemplo 2:

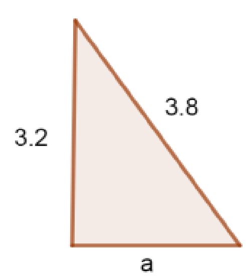
Se desea saber a qué distancia de la pared se debe colocar el pie de una escalera, para que ésta que mide 3.8 m llegue al extremo superior de la pared que mide 3.2 m.

Procedimiento:

1. Trazamos un dibujo que represente lo establecido en el texto.



2. Anotamos el valor de cada una las partes mencionadas en un triángulo



3. Despejamos la incógnita faltante como se indicó anteriormente, observamos qué datos tenemos y comenzamos a sustituir la fórmula:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a^2 = 3.8^2 - 3.2^2$$

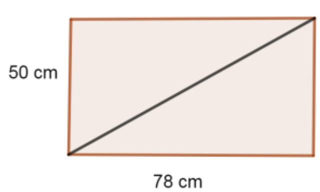
4. Resolvemos:

$$a^2 = 3.8^2 - 3.2^2$$
$$a^2 = 14.44 - 10.24$$
$$a^2 = 4.2$$
$$a = \sqrt{4.2}$$
$$a = 2.05$$

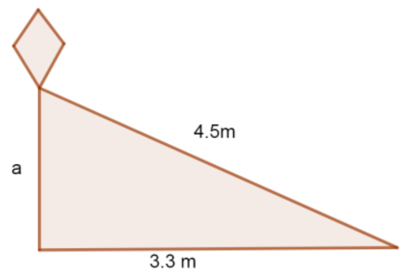
Debemos colocar el pie de la escalera a 2.05 m de la pared.

Comprueba tu aprendizaje, resuelve los siguientes ejercicios:

1. La medida de un televisor se determina mediante la diagonal de su pantalla. Si la pantalla de un televisor mide aproximadamente 50 cm de alto y 78 cm de largo, ¿de cuántas pulgadas es éste televisor? (2.54 cm = 1 pulgada)

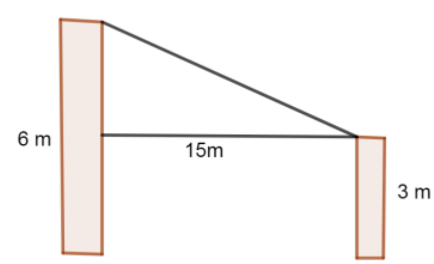


2. ¿A qué altura volamos un papalote si nuestro hilo con el que lo sujetamos mide 4.5m y nos



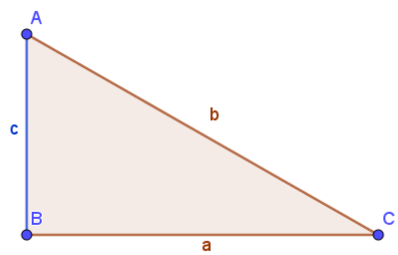
encontramos a 3.3 m de distancia de él?

3. En un centro recreativo desean colocar una tirolesa, para lo cual desean saber cuánto cable necesitan comprar; desde la torre de salida hasta la torre de llegada hay 15m de distancia y cada torre tiene 6m y 3m respectivamente.



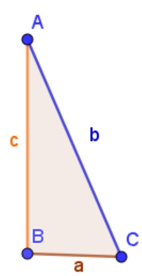
Actividades de cierre

1. En la escuela a la que asistes es necesario anclar la asta bandera al piso, ya que los aires generados por la lluvia en verano pueden tirarla. La asta bandera tiene las siguientes dimensiones: Una altura de 6.5m (c). El espacio con que se cuenta para anclarlo (a) tiene una dimensión de 8m. ¿Cuánto debe medir el tirante de anclaje (b)?



2. En casa mide la longitud de una escalera que tengas a la mano. Con esta información ve completando los datos en la siguiente figura. Apoya la escalera en la pared y separa la base de la escalera 50 cm de la pared, con esta información sustituye en la fórmula del Teorema de Pitágoras y obtén los datos faltantes.

   El triángulo rectángulo que se presenta a continuación está formado por la escalera (b) la distancia de separación de la pared a la base de la escalera (a) y altura de la escalera en la pared (c).

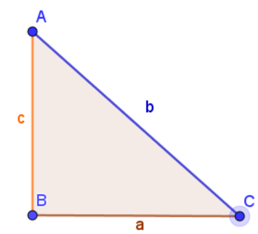


b: longitud de la escalera en metros: ________________________

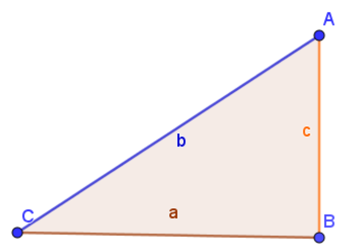
a: distancia de la escalera a la pared con respecto del piso: 50 cm

c: altura de la escalera con respecto a la pared: _______________________

3. Afuera de tu casa hay un árbol, del cual quieres obtener su altura, éste tiene un tirante para evitar su deformación, por lo tanto, conoces los siguientes datos:
   Distancia del tirante b: 4.2mts
   Distancia del anclaje del tirante a la base del árbol: 3.5 mts.
   ¿Cuál es la altura del árbol?

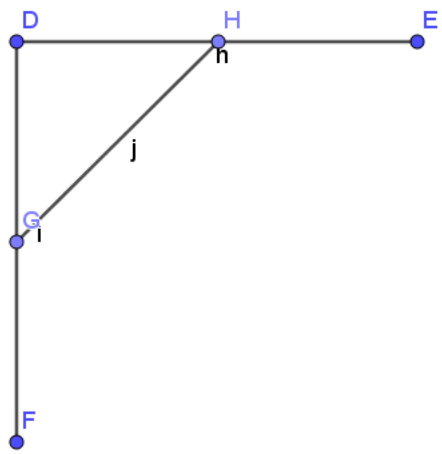


4. Tienes tres lugares frecuentes en tu rutina diaria: tu casa (punto C); tu escuela (punto A); y tus clases de inglés (punto B). Conoces que la distancia que hay desde tu casa hasta tus clases de inglés es de 2.5 km y la distancia que hay desde tus clases de inglés hasta tu escuela es de 1.8 km. Con estos datos, ¿Calcula la distancia que existe entre tu casa y tu escuela?



5. En la cocina de tu casa, tu mamá te ha encargado instalar una repisa usando una tabla de 30 cm x 80 cm, dos soportes tipo escuadra de 27cm x 27 cm de cada lado. Cuando revisas los soportes, te das cuenta de que hay que agregar con un pedazo de madera a cada uno de ellos

(segmento j). El pequeño pedazo de madera corre a ambos lados del soporte y se une en el punto medio de cada lado como se muestra en la siguiente figura:

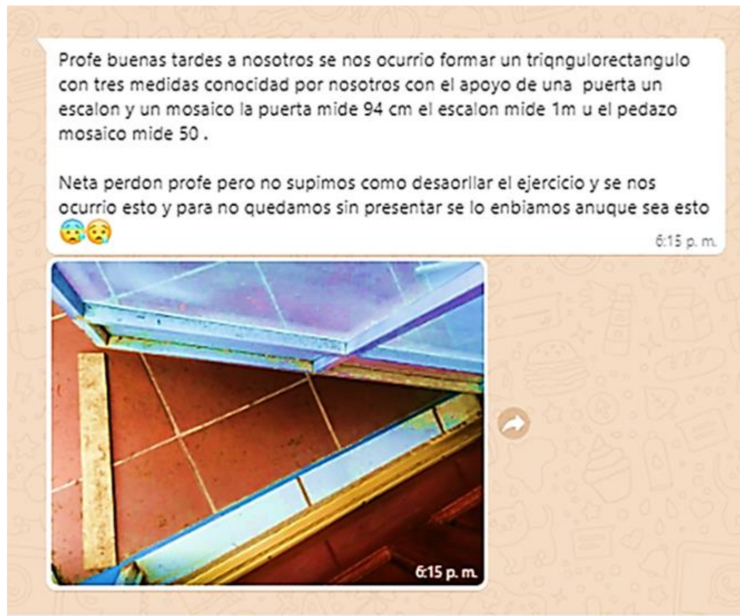


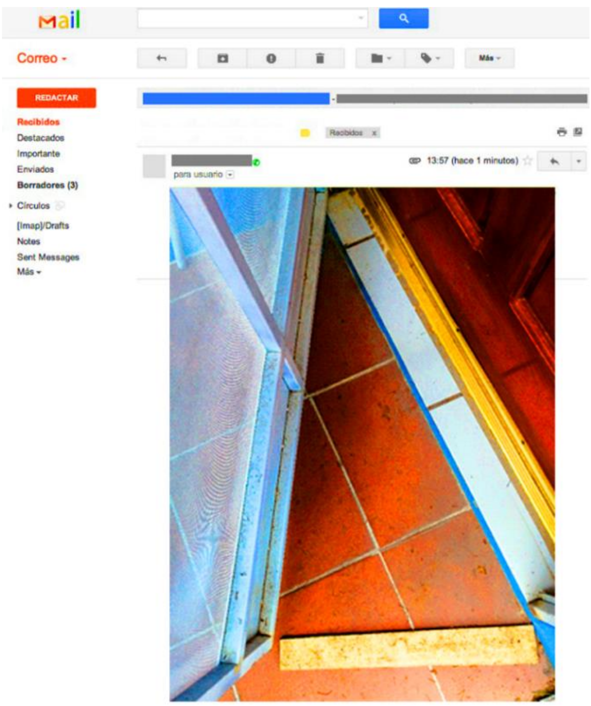
¿Cuál es la dimensión del segmento “j” de acuerdo con los datos presentados?

Actividades de contexto o Transversales

1. El docente de Geometría encargó a sus alumnos que diseñaran un problema de cómo aplicar el Teorema de Pitágoras en su entorno. Dicho problema debería ser de una imagen en donde se pudiera apreciar que se formaba un triángulo rectángulo, para aplicar el TEOREMA DE PITÁGORAS. La condición en lo posible era utilizar figuras u objetos de medidas conocidas para no utilizar la cinta métrica.

Uno de los equipos le mandó el siguiente mensaje:

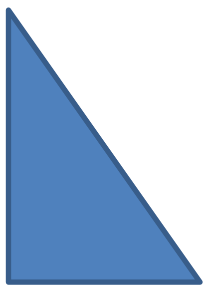




Al docente le pareció interesante compartir con los alumnos del grupo el reto, ¿cómo comprobar si éste triángulo correspondía a un triángulo rectángulo? Para ello, les solicitó enviaran la fotografía al correo del docente para una adecuada observación, la cual se muestra a continuación:

De acuerdo a la fotografía, dá la impresión de que la figura no corresponde a un triángulo rectángulo, pero ¿cómo podemos comprobarlo matemáticamente?

Pues definitivamente aplicando el teroema de Pitágoras. Para ello te recomendamos dibujar un triángulo rectángulo y ubicar en el mismo las medidas proporcionadas.



¿La medida de 1 m que lado del triángulo le corresponde? ____________________

¿El de 94 cm que lado del triángulo le corresponde? __________________________

Al emplear el teorema de Pitágoras como apoyo para demostrar si la figura corresponde a un triángulo rectángulo, entonces es importante que transcribas el enunciado del Teorema de Pitágoras.

____

____

Basándote en el enunciado, sustituye los valores correspondientes en la fórmula y determina si se cumple la igualdad.

¿Se cumplió la igualdad? ______________, entonces ¿el triángulo diseñado por los alumnos es rectángulo? _______________

Situación complementaria:
Si lees el mensaje de texto que mandaron los alumnos al docente, notarás algunos errores en su redacción, puntuación, faltas de ortografía y acentuación. ¿Podrías, con base en los conocimientos que te otorgó el docente de LEOYE, diseñar un enunciado técnicamente adecuado? Escríbelo:

____

____

____

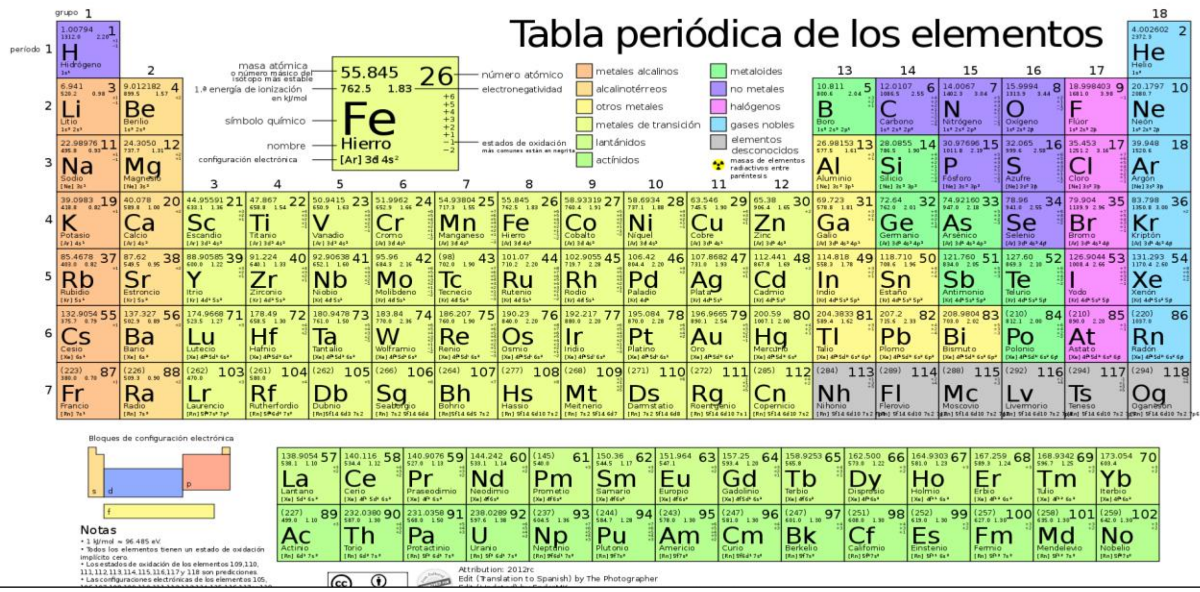
____

Sería conveniente comentar esta situación en su clase de LEOYE, para que, con el apoyo de su docente, realicen un análisis crítico respecto a la importancia de una adecuada redacción de un mensaje, respetando la ortografía, acentuación y puntuación, y cómo influye esto en la comunicación escrita.

2. En la siguiente fotografía se desea conocer la altura de la azotea de la habitación al piso del jardín, como no se tiene cinta métrica, se hace uso de una escalera de aluminio de 3 metros de largo y cuyos peldaños tienen una separación de 30 centímetros(según indica su etiqueta).Al colocar la escalera de manera que su extremo superior queda al ras de la azotea , la separación que existe desde la base de la escalera hasta la base de la pared de la habitación mide $4\frac{1}{4}$ veces la distancia entre los peldaños. Determina la distancia en metros, entre la azotea y el piso del jardín.

Situación complementaria.
Como la escalera es de material de aluminio. ¿recuerdas el símbolo químico de este elemento? Escríbelo _______.

Con el apoyo de la siguiente tabla periódica. Ubícalo y enciérralo en un círculo.



Determina su masa atómica _________.
¿Te has preguntado porque las escaleras en su mayoría son de aluminio en vez de fierro? Como el que utilizan los herreros.

En base a la pregunta anterior porque consideras que se utilice de aluminio en vez de fierro____.

Intentaremos corroborar la información mediante la siguiente deducción:
Anota el símbolo del hierro ________Ubícalo en la tabla periódica y enciérralo con un círculo.
Determina la masa atómica del hierro ______
Nuevamente escribe las respectivas masas atómicas: Aluminio ______ Hierro ______

¿Cuántas veces mayor es la masa atómica del hierro comparada con la del aluminio? El resultado anterior, ¿Apoya tu conclusión acerca de porque son más comunes las escaleras de aluminio?
¿Crees que en base a los datos de masa atómica nos sirva para establecer una relación cuantitativa entre el peso de la escalera de aluminio y la hierro? ________
En caso de que sea afirmativa esta suposición ¿cuánto pesaría una escalera de hierro de la misma forma y tamaño, considerando que la de aluminio pesa 12.8 kg.? ___________

Para determinar si esta conclusión es verídica consúltalo con tu profesor de química o en algún texto de la materia.
En caso de que sea errónea la suposición realizada, define cual es la magnitud adecuada para hacer la comparación y realiza los cálculos para determinar la masa de la escalera de Hierro.

Ejercicios Adicionales

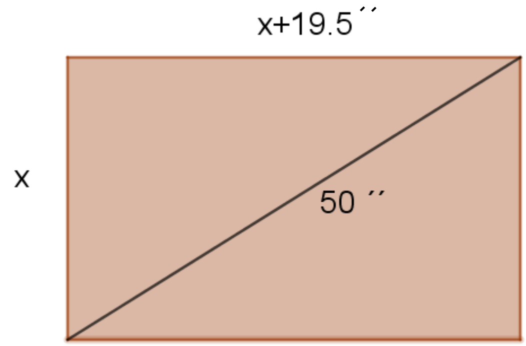
Ante el episodio de la pandemia, la mayoría de las personas han estado atentas a los medios de comunicación masiva, para enterarse del avance del coronavirus COVID-19 en nuestro país.

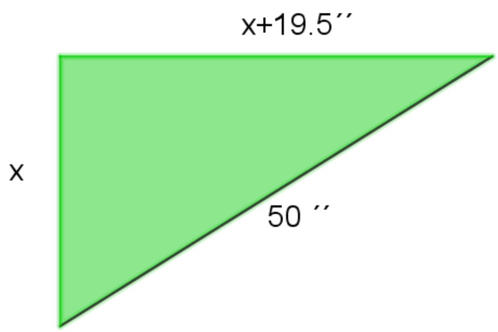
Uno de ellos era un docente de la asignatura de Matemáticas, quien, mientras recibía los consejos del subsecretario Dr. Hugo López-Gatell Ramírez respecto a “cómo cuidarse durante este periodo de contingencia de salud pública por el bien de todos”, el docente se cuestionó acerca de las medidas de su televisor. “Sé perfectamente que mi televisión es de 50 pulgadas, también sé que esta medida se refiere solo a la diagonal de la pantalla, pero ¿Cuánto medirá de los lados?” se dijo para sí mismo.

Inmediatamente después, buscó una cinta métrica en su caja de herramientas, pero lamentablemente, ¡la cinta solo podía medir hasta 21 pulgadas!, por lo que no pudo medir el ancho ni el largo de su televisión con ella directamente, ya que era demasiado pequeña. Como buen docente de matemáticas encontró rápidamente una solución, con la ayuda de un cordel, cortó un tramo equivalente al ancho del televisor, con dicho tramo de cordel, se ayudó para obtener la medida del largo mediante una expresión algebraica, tomando en cuenta que el largo de la televisión era 19.5 pulgadas mayor que su ancho.

“Por la forma geométrica y los datos obtenidos de la pantalla” –expresó- “me apoyaré con el Teorema de Pitágoras, asignaré a la medida desconocida del cordel la literal x”.

Acto seguido su diseñó quedó así:





Anota la fórmula que identifica el teorema de Pitágoras.

De acuerdo con ella y con los datos de la figura izquierda sustituye valores

Realiza operaciones y despeja el valor de x

Recuerda que para desarrollar un binomio al cuadrado está la relación: $(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$

Una vez sustituido y desarrollado el binomio, elevado el monomio y el término numérico al cuadrado. ¿Qué resultado quedó? Selecciona:

a) $x^2 + x^2 + 39x - 380.25 = 2500$
b) $x^2 + x^2 - 39x + 380.25 = 2500$
c) $x^2 + x^2 + 39x + 380.25 = -2500$
d) $x^2 + x^2 + 39x + 380.25 = 2500$

Una vez que identificaste el resultado iguala a cero te queda una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Se aprecian 4 opciones ¿cuál de ellas es?, subráyala.

$a)$ $2x^2 - 39x - 2119.75 = 0$　　$b)$ $2x^2 + 39x - 2150.55 = 0$

$c)$ $2x^2 + 39x - 2119.75 = 0$　　$d)$ $2x^2 - 39x - 2150.55 = 0$

Notarás que en la vida práctica es muy común que aparezcan cantidades con decimales, utiliza la formula general para encontrar el valor de x empleando 3 decimales para un poco de mayor precisión. Una vez resuelto el valor de x es:

a) $x = 23.18$ b) $x = 24.234$ c) $x = 23.898$ d)$x = 24.358$

Finalmente, el docente pudo conocer la medida del largo y el ancho.

Ancho _______________ Largo ________________

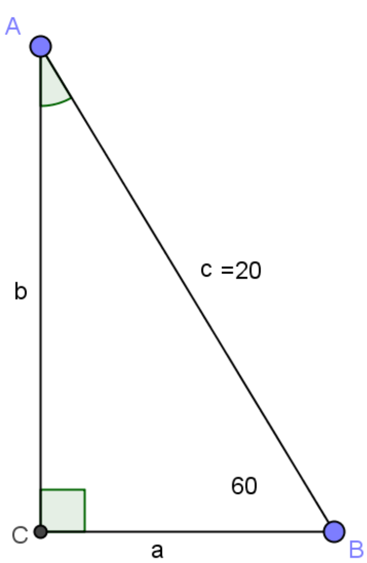
Pero como la pulgada es una unidad de medida del sistema inglés, las quiso convertir a centímetros para tenerlas en una unidad de medida del sistema métrico decimal.

2.1.3 Uso de las razones trigonométricas y sus inversas en la solución de problemas

Introducción

En el apartado anterior aprendiste a encontrar las medidas de los lados faltantes de un triángulo rectángulo utilizando el teorema de Pitágoras. Una mente curiosa se preguntaría como se pueden calcular los ángulos y que información se debe tener para poder hacerlo. De hecho, para resolver un triángulo cualquiera, es decir, para calcular los lados y/o ángulos. Sin embargo, como en un triángulo rectángulo ya se conoce el ángulo recto, basta con tener información sobre otros dos elementos, para calcular los faltantes.

Cuando conocemos dos lados, podemos calcular la medida del otro con el teorema de Pitágoras. ¿Pero qué pasa si solo tengo la medida de uno de los lados? Para poder calcular uno de los lados faltantes debo conocer un ángulo agudo y usar la razón trigonométrica apropiada para de allí despejar el valor pedido.



Ejemplo 1: Considera el triángulo de la figura donde se conoce el ángulo B=60 grados y la hipotenusa c= 20 unidades.

Si quiero calcular el cateto a**,** ya no puedo usar el Teorema de Pitágoras. Por tanto, debo usar una razón trigonométrica. ¿Cuál es la apropiada? La razón que usemos debe involucrar a la hipotenusa y al cateto a, que es adyacente al ángulo B.

¿Cuáles son las razones que involucran estos dos elementos?

Las razones son $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ y su reciproca $\frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$.

Anteriormente, establecimos que cada una de las razones en el triángulo rectángulo, tienen un nombre para cada ángulo agudo. Una es el coseno B y la segunda es la secante B. Si usamos el coseno B.

$\cos B = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ en esta razón sustituimos los valores conocidos.

$\cos 60° = \frac{a}{20}$ enseguida despejamos **a**: $20(\cos 60°) = a$

Usamos la calculadora para sacar $\cos 60° = 0.5$

de donde resulta que $a = 20(0.5)$

$a = 10$

Entonces el cateto a mide 10 unidades.

Como ahora ya conocemos la medida de a y c, dos de los lados, podemos calcular el cateto b con el teorema de Pitágoras.$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

$$b = \sqrt{20^2 - 10^2}$$

$$b = \sqrt{400 - 100}$$

$$b = \sqrt{300}$$

$$b = 17.32$$

También podríamos haber calculado b, con una razón trigonométrica de cualquiera de los ángulos agudos ya que el ángulo A, por ser complementario del ángulo B mide $A = 90 - 60 = 30°$

Si consideramos al cateto b como el opuesto del ángulo B y consideramos la hipotenusa, entonces la razón apropiada para usar en el cálculo de b es el seno B.

$$sen\ B = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Sustituyendo valores:

$$sen\ 60 = \frac{b}{20}$$

Despejamos b: $b = 20(sen\ 60)$

$b = 20(0.8660) = 17.32$

Observa que nos da el mismo resultado.

Ahora consideremos, el caso en el que se conocen dos lados (y el ángulo recto), para hallar la medida de los ángulos agudos. El tercer lado se puede hallar con el Teorema de Pitágoras, como ya lo practicaste en el tema anterior.

Para calcular ángulos, se requiere introducir una operación inversa a obtener los valores de las razones trigonométricas de un ángulo.

Ejemplos de obtención del valor de una razón:

$Sen\ 30° = 0.5$ significa que al comparar la medida del cateto opuesto con la hipotenusa de un triángulo con ángulo de referencia de 30 grados este es la mitad de la medida de la hipotenusa.

$Tan\ 45° = 1$ significa que el cateto opuesto y el cateto adyacente en un triángulo con un ángulo de 45 grados, medirán lo mismo, porque la razón es 1.

Ahora, ¿qué pasa si conozco la razón, pero quiero el ángulo correspondiente?
Para ello debemos utilizar la función inversa de la razón que conozcamos.

Por ejemplo:

- Si la razón o cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente es 2. El ángulo A correspondiente a esta razón, usando la calculadora es:

$$A = tan^{-1}(2) = 63.435°$$

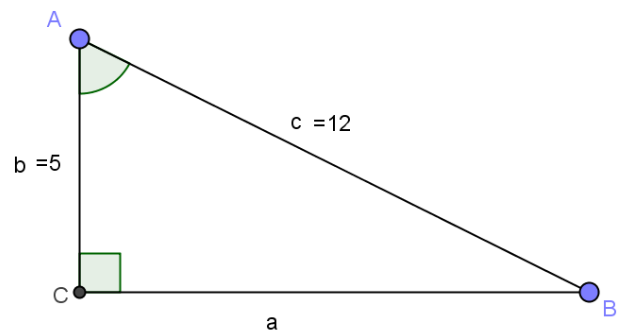
- Si el seno B= 0.5640, entonces:

$$B = sen^{-1}(0.5640) = 34.333°$$

- Si el cos A= 3 / 5, entonces:

$$A = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = cos^{-1}\,(0.6) = 53.130°$$

Resolvamos el triángulo mostrado en la ilustración.



En este triángulo se proporcionan dos lados del triángulo. Aprovechando esa información para calcular el ángulo A, vemos que conocemos su cateto adyacente b y la hipotenusa.

Entonces, la razón que debemos emplear es: $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ que corresponde al coseno A.

El valor del $cosenoA = \frac{b}{c} = \frac{5}{12}$ = 0.416667.

Con el valor de la razón del coseno del ángulo A, podemos ya calcular la medida de A , como lo hicimos anteriormente:

$$A = cos^{-1}(0.416667) = 65.3757\ grados$$

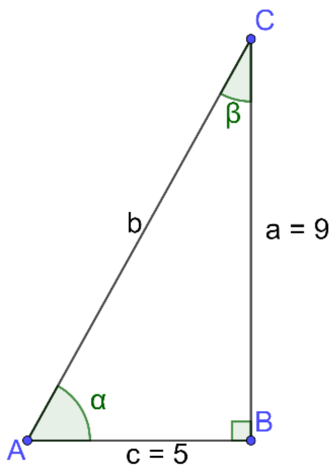
Actividades de Apertura

1. Resuelve los siguientes ejercicios mediante razones trigonométricas inversas:

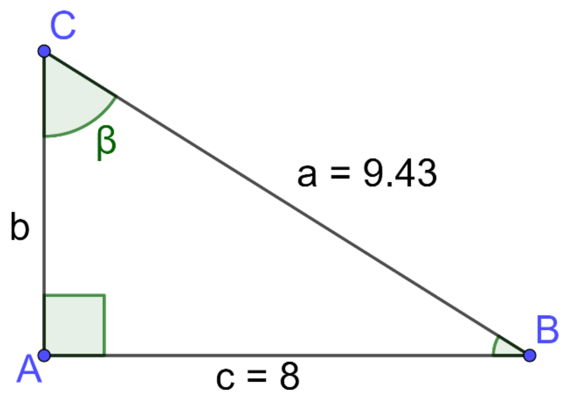
a) Del siguiente triángulo encuentra:

1) La medida de $\angle\alpha$

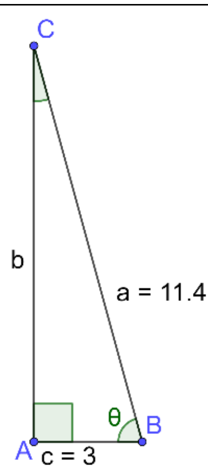
2) La medida de $\angle\beta$



b) ¿Cuál es la medida del ángulo β?

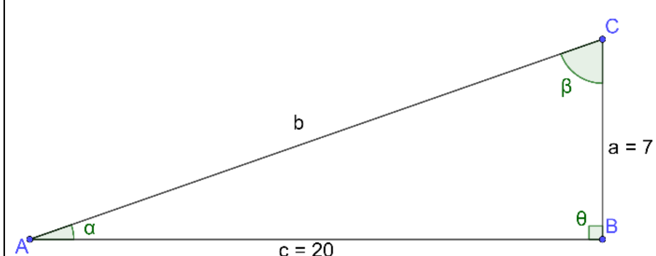


c) ¿Cuál es la medida del ángulo θ?



d) Del siguiente triángulo encuentra:

1) $\angle\alpha =$ 2) $\angle\beta =$ 3) $\angle\theta =$



e) ¿A qué distancia de la base de un edificio debe situarse una escalera de 5 metros de longitud, para que alcance una altura de 3 metros?

f) Cuando se usa una escalera, por seguridad, el ángulo de inclinación con respecto del piso no debe ser mayor de 70 grados. ¿Es seguro usar la escalera para la situación del ejercicio 5?

Actividades de Desarrollo

1. Resuelve los siguientes ejercicios con los temas revisados hasta este momento:

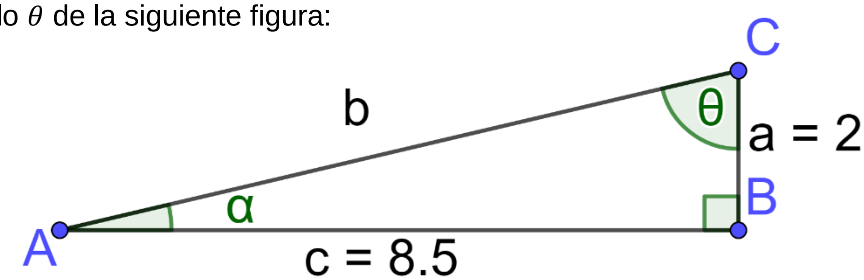
a) Se sabe que $Sen\,\theta = 0.85$, encuentra la medida del ángulo θ.

b) Se conoce que $Cos\,\theta = 0.5$, encuentra la medida del ángulo θ.

c) Se sabe que la $Tan\,\theta = 1$, encuentra la medida del ángulo θ.

d) De un triángulo rectángulo se conoce la medida de los catetos. El cateto más pequeño mide 3cm y el más grande mide 4cm. Calcula las medidas de los tres ángulos:

e)- Encuentra la medida del ángulo θ de la siguiente figura:

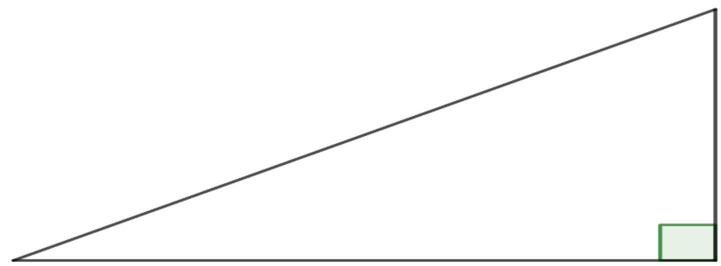


2. Contesta cada inciso solicitado con la siguiente figura:

a) Escribe sobre el triángulo las siguientes medidas:

Para el cateto más pequeño: 6cm

Para el cateto más grande: 11cm



b) Calcula la hipotenusa del triángulo:

c) Calcula los tres ángulos de la figura:

3. En los problemas siguientes dibuja el esquema que los represente y contesta lo que se pide.

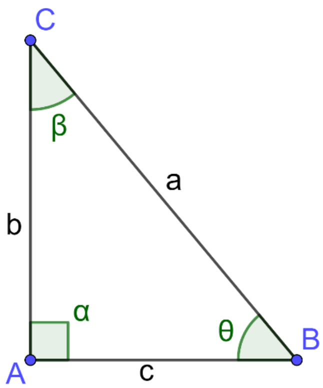
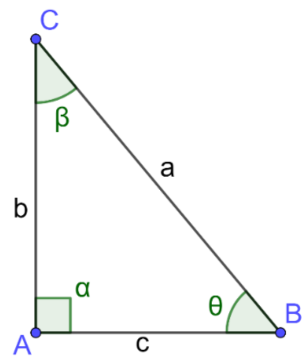
a) Desde la parte más alta de una torre de 50 metros de altura se observa una lancha en un lago. El ángulo de depresión de la lancha es de 35 grados. ¿A qué distancia de la base de la torre se encuentra la lancha?

b) La profundidad de una alberca aumenta paulatinamente desde 0.80 metros hasta 3 metros en una longitud de 10 metros. ¿Cuál es el ángulo de inclinación del fondo de la alberca?

c) Un helicóptero de búsqueda, que vuela a una altura de 100 metros observa a su derecha un rinoceronte negro con un ángulo de depresión de 45° y a su izquierda un Jeep de los guardaparques con un ángulo de depresión de 30°. ¿Cuál es la distancia entre el rinoceronte y el Jeep?

Actividades de cierre

1. Con la resolución de los siguientes ejercicios se pretende que emplees todos los conocimientos desarrollados hasta este momento:

 a) Considera las siguientes medidas del triángulo: a= 34cm b= 27cm Calcula lo siguiente: ¿Cuál es la medida del cateto faltante? ¿Cuál es la medida del $\angle\alpha$? ¿Cuál es la medida del $\angle\beta$? ¿Cuál es la medida del $\angle\theta$? ¿Cuánto es el $Cos\ \beta$? ¿Cuánto es el $Sen\ \theta$?	 b) Considera las siguientes medidas del triángulo: b= 21cm c= 20cm Calcula lo siguiente: ¿Cuál es la medida de la hipotenusa? ¿Cuál es la medida del $\angle\alpha$? ¿Cuál es la medida del $\angle\beta$? ¿Cuál es la medida del $\angle\theta$? ¿Cuánto es la $Tan\ \beta$? ¿Cuánto es el $Sen\ \theta$?

Actividades de contexto o Transversales

1. Se desea construir un plano inclinado de madera, para subir carretillas con mezcla de cemento hasta una altura de 1.5 metros. La distancia horizontal desde donde empieza a elevarse, hasta la parte más alta, es de 4 metros y el ancho es de 1 metro. La superficie de rodadura del plano será una plancha de triplay de ¾ de grosor. Las partes donde se apoyará el triplay (superficie de rodadura) serán tres armazones iguales al que se muestra en la figura. Dichos armazones se harán con barrotes de madera de 2x2 pulgadas. Los barrotes verticales del armazón estarán espaciados medio metro. (La figura 1.6 solo muestra las posiciones de los barrotes no la cantidad de estos).

a) Calcula la medida de los ángulos que forman los barrotes transversales del armazón de soporte.

b) ¿Cuánto debe medir el ángulo de inclinación del plano inclinado para que alcance una altura de 3 metros?

c) ¿Cuánto mide la longitud de la superficie de rodado del plano?

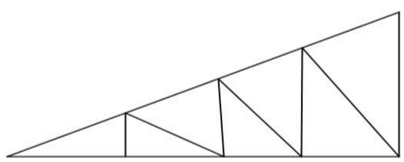


Figura 1.6. Armazón de apoyo del Plano inclinado.

2.1.4 Identidades básicas a partir de las razones trigonométricas

Introducción

De las actividades anteriores aprendiste las definiciones de las razones trigonométricas de cualquier ángulo agudo en el triángulo rectángulo:

$$Seno\ A = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}, \quad Coseno\ A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}, \quad Tangente\ A = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente},$$

$$Cotangente\ A = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}, \quad Secante\ A = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}, \quad Cosecante\ A = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

A partir de estas razones podemos determinar relaciones de igualdad entre ellas llamadas identidades. Una identidad trigonométrica es una igualdad algebraica entre razones de un mismo ángulo que se verifican para un número infinito de valores que se atribuyan a dicho ángulo. Las identidades trigonométricas nos permitirán modificar una ecuación para que sea más sencillo resolverla.

Las razones reciprocas nos permiten obtener las identidades trigonométricas básicas directamente de las definiciones anteriores. Recordemos que las razones se expresan directamente como fracciones. Además, una fracción multiplicada por su reciproca nos da como resultado uno. Por ejemplo:

Fracción: $\frac{3}{4}$ su fracción recíproca: $\frac{4}{3}$ su producto: $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{12} = 1$

Si aplicamos esto a las definiciones de razones trigonométricas obtendremos las identidades mencionadas.

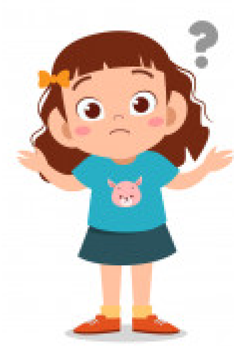
Observa que $(Sen\ A)(\mathrm{Csc}\ A) = 1$, porque según las definiciones, las fracciones que nos dan su valor son reciprocas, es decir

$Sen = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ su recíproco: $Csc = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ su producto: $\left(\frac{cat.op}{hip}\right)\left(\frac{hip}{cat.op}\right) = 1$

Otras formas de expresar esta identidad son despejándola para el seno o para la cosecante.

$$SenA = \frac{1}{\operatorname{Csc} A} \qquad \text{o también} \qquad CscA = \frac{1}{\operatorname{Sen} A}.$$

Una utilidad directa de esta identidad se tiene cuando necesitamos calcular valores de la cosecante de algún ángulo. Por ejemplo, si queremos calcular $cosecante\ 50°$ tenemos el problema que la calculadora no contempla esta función trigonométrica. Pero como si tiene el seno, entonces:



$$CscA = \frac{1}{\operatorname{Sen} A} = \frac{1}{Sen\ 50\ grados} = \frac{1}{0.7660}=1.30541$$

Actividades de Apertura

1) Identifica otras razones que sean reciprocas y encuentra una expresión para la identidad que definen.

2) Utiliza las identidades anteriores para calcular los siguientes valores de funciones trigonométricas de ángulos medidos en grados:

a) Sec 20° b) Cot 70° d) Csc 75° e) Sec 50°

Actividades de Desarrollo

1. Considera las razones equivalentes al seno A y coseno A dadas en las definiciones y efectúa las siguientes divisiones: $\frac{sen\ A}{\cos A}\ y\ \frac{cosA}{senA}$.

2. A partir de los resultados de las divisiones anteriores establece las identidades resultantes.

3. Utiliza las identidades anteriores para calcular lo que se te solicita a continuación:

   a) El valor de $\tan A + \cot A \ \ en\ función\ de\ senos\ y\ cosenos$.
   b) El valor de $secA + tan^2A$ en función de senos y/o cosenos.
   c) Una expresión equivalente a $sec^2A - tan^2A$.
   d) Una expresión equivalente a $\frac{\sec A}{cscA}tanA$.

Actividades de cierre

1. Utilizando las identidades tratadas hasta aquí y para cada una de las siguientes igualdades, simplifique ambos miembros hasta que solo queden las funciones seno y coseno en cada expresión sin posibilidad de hacer más operaciones.

$a)\ \mathrm{Csc}\,\theta \cdot \mathrm{Cos}\,\theta = \cot\theta$ b) $\mathrm{Csc}\,\theta \cdot \mathrm{Tan}\,\theta = \mathrm{Sec}\,\theta$ c) $\mathrm{Cos}\,\theta\,(\mathrm{Tan}\,\theta + \mathrm{Cot}\,\theta) = \mathrm{Csc}\,\theta$

$d)\ \mathrm{Sec}\,\theta - \mathrm{T\,an}\,\theta = \frac{\mathrm{Cos}\,\theta}{1+Sen\,\theta}$ $e)\ \frac{\mathrm{Tan}\,\theta+\mathrm{Sec}\,\theta-1}{\mathrm{Tan}\,\theta-\mathrm{Sec}\,\theta+1} = \mathrm{Tan}\,\theta + \mathrm{Sec}\,\theta$ f) $\frac{Sec^2\,\theta - Tan^2\theta + \mathrm{Tan}\,\theta}{\mathrm{Sec}\,\theta} = Sen\theta + \mathrm{Cos}\,\theta$

2. En las ecuaciones simplificadas del apartado anterior, sustituya un valor para el ángulo ɵ y calcule el valor de cada lado de la igualdad. Las igualdades mostradas, ¿Son identidades o son ecuaciones?

2.2 Funciones trigonométricas en el círculo unitario y círculo general.

Introducción

Cuando trabajamos con triángulos rectángulos, los ángulos que utilizamos tienen medidas que se contemplan entre 0 y 90 grados. Si los triángulos involucrados en nuestro problema son oblicuángulos, las medidas de los ángulos a lo sumo son de 180 grados. Más aún, existen situaciones en las cuales los ángulos pueden tener cualquier medida, incluso con valores negativos.

¿Cómo podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas de ángulos mayores de 90 grados? Primero que nada, debemos de conocer los elementos del sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares.

El plano cartesiano

En un sistema bidimensional o de dos dimensiones, las posiciones de cada uno de los puntos que son representables en el plano están dadas por un par de coordenadas P(x.y), una que corresponde al eje horizontal conocido como de las abscisas (x), y otra que corresponde al eje vertical que también se nombra como el eje de las ordenadas (y). Se considera su centro u origen, el cual se utiliza como una posición de referencia y tiene la característica de que se emplea para indicar la posición en que se encuentran las cantidades positivas o negativas

El plano cartesiano recibe otros nombres como sistema coordenado, sistema de coordenadas rectangulares o simplemente plano.

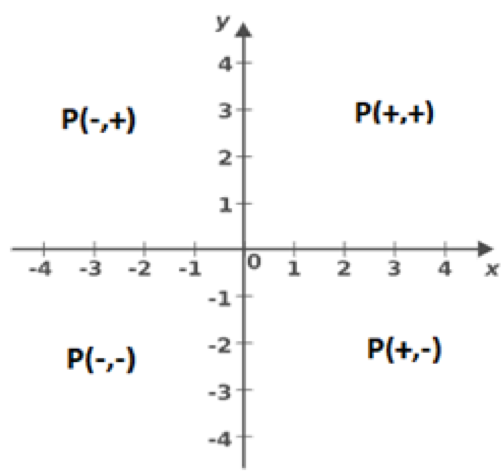
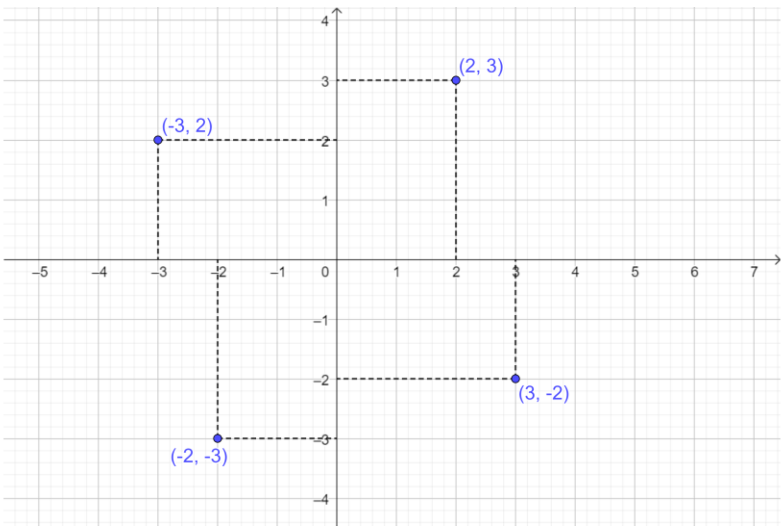


Figura 2.1 Signo que adopta cada una de las coordenadas, de acuerdo con su posición respecto al centro.

Es de particular interés, conocer la forma en que ubica un punto en el plano, la forma más sencilla de ubicar un punto es verificar el signo de la primera coordenada x que describe al punto, si es positiva se ubicará a la derecha del origen, en caso contrario se localizará a la izquierda¸ lo mismo sucederá con la segunda coordenada y, en este caso las cantidades positivas se ubican en la parte superior y las negativas en la parte inferior. Con esta idea y a manera de ejemplo se ubicarán los siguientes puntos:(2,3), (-3,2), (-2,-3) y (3,-2).



Al ubicar un punto en el plano cartesiano se describe un rectángulo con los ejes coordenados, que se han resaltado en la Fig.2, de ahí que el plano se conoce también como sistema de coordenadas rectangulares

Figura 2.2 Localización de puntos en plano cartesiano

El plano cartesiano, como es el resultado de dos ejes que se cruzan perpendicularmente en un punto, está dividido en cuatro regiones, a estas regiones se le conoce como ***cuadrantes*** y se distingue por el signo de los pares de coordenadas que se pueden representar en ellas. Cuando se localiza un punto en el plano cartesiano, se forma un rectángulo con el eje coordenado.

Cuando se localiza un punto en el plano, se necesitan ubicar sus coordenadas rectangulares y al trazar una línea de las coordenadas de un punto localizado al centro u origen de éste, se forma un triángulo rectángulo.

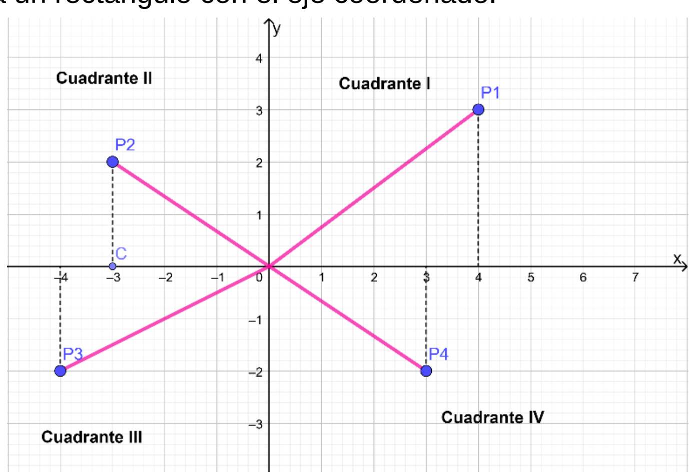


Figura 2.3 El triángulo rectángulo en su posición normal en sus cuatro cuadrantes.

Ahora que ya conocemos el plano cartesiano, consideremos un círculo de radio 1, llamado círculo unitario con centro en el origen del sistema de coordenadas rectangulares. Si localizamos puntos cualesquiera sobre la circunferencia (uno en cada cuadrante) y dibujamos ángulos en posición normal o estándar, es decir, que su lado inicial coincide con el semieje X positivo y el lado terminal sea la semirrecta que une el origen con cada uno de los puntos sobre la circunferencia nos daremos cuenta de que podemos considerar ángulos cuya medida puede ir desde 0 hasta 360 grados. Nombremos θ al ángulo así formado. Si la dirección en que medimos el ángulo es en sentido contrario a las manecillas del reloj el ángulo θ se considera positivo y negativo en sentido contrario. Incluso podemos considerar valores de θ mayores de 360 grados si consideramos que giramos alrededor del perímetro del círculo el número de vueltas que queramos

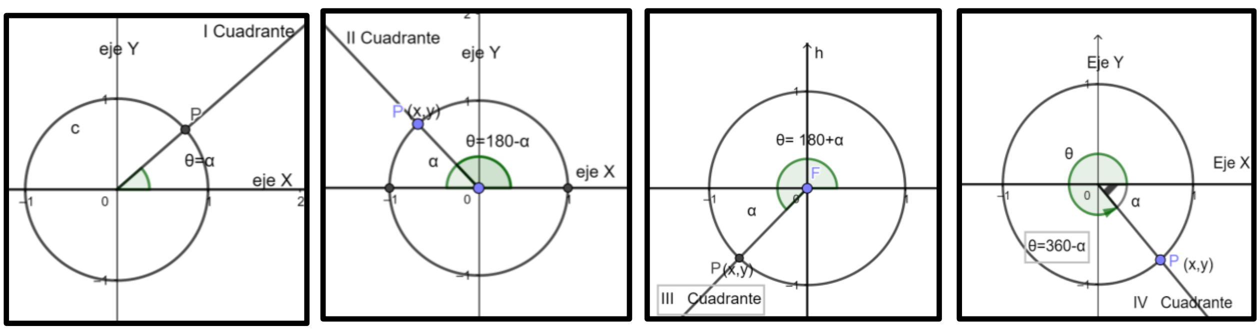
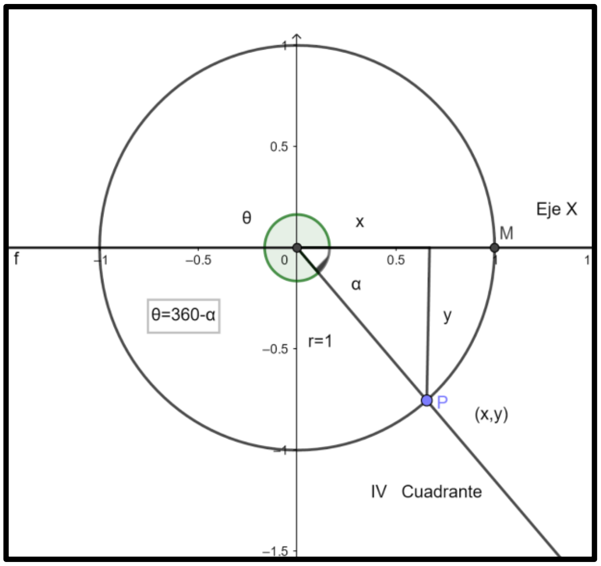


Figura 2.4: Las posiciones del ángulo θ y el ángulo auxiliar α en los cuadrantes.

¿Cómo podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos que no son ya parte de un triángulo rectángulo? ¿Pudiéramos usar lo aprendido sobre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo para conocer la de estos?

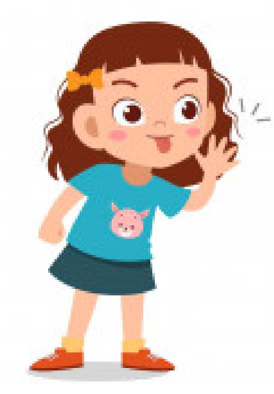
Para aprovechar lo que ya sabemos de las razones trigonométricas, pongamos atención a los triángulos rectángulos que se forman en cada cuadrante. En la figura se muestra el triángulo rectángulo correspondiente al cuarto cuadrante. Observa que α es el ángulo que se forma entre el lado terminal del ángulo θ y el semieje x, más cercano a ese lado terminal. La hipotenusa coincide con el radio por lo que siempre tendrá el valor de 1, por ser el radio del círculo unitario. Además, los catetos medirán lo mismo que las coordenadas del punto sobre la circunferencia. El cateto adyacente siempre medirá el valor de la coordenada en X, el cateto opuesto tendrá como medida el valor de la coordenada en Y.



Entonces, si calculamos las razones trigonométricas del ángulo alfa podemos relacionar los valores de estas con las razones del ángulo theta, se deben respetar los signos de las coordenadas del punto por donde pasa el lado terminal del ángulo. Para la figura *mostrada*, donde θ se encuentra en el cuarto cuadrante expresamos las razones para el ángulo α así: $sen\ \alpha = \frac{y}{1}$, $cos\ \alpha = \frac{x}{1}$, $tan\ \alpha = \frac{y}{x}$, en donde las coordenadas *x, y* se toman siempre positivas porque α en su posición normal sería un ángulo del primer cuadrante y todos los ángulos cuya medida está entre 0 y 90 grados (0 y π/2 radianes) tienen valores positivos para todas las funciones trigonométricas. Para el ángulo θ, las funciones trigonométricas serán: $sen\ \theta = \frac{y}{1}$, $cos\ \theta = \frac{x}{1}$, $tan\ \theta = \frac{y}{x}$ de donde $y = sen\ \theta$ y $x = cos\ \theta$

Pero observa algo importante, aquí se debe tomar el signo de las coordenadas x,y de acuerdo al cuadrante donde está el lado terminal del ángulo **θ**. De acuerdo con lo anterior; los valores del coseno y el seno del ángulo theta son los valores de las coordenadas **x** y **y (respectivamente)** del punto P, tomadas con el signo correspondiente

De esta manera, **el valor absoluto** de los valores de las funciones trigonométricas del ángulo **α y el ángulo θ es el mismo**, lo que significa que la única diferencia en esos valores puede ser el signo, de acuerdo con el signo de las coordenadas del punto que el lado terminal del ángulo θ toque en la circunferencia del círculo unitario.



De lo anterior, se observa que en el círculo unitario: $y = sen\ \theta$ y $x = cos\ \theta$:

Si consideramos un círculo con radio diferente de 1, entonces las funciones trigonométricas de θ serán:

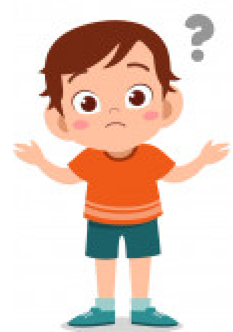
$$sen\ \theta = \frac{y}{r},\ cos\ \theta = \frac{x}{r},\ tan\ \theta = \frac{y}{x} \text{ de donde } y = r\ sen\ \theta \text{ y } x = r\ cos\ \theta$$

Ejemplo: Considere el ángulo en posición normal $\theta=315°$.

1) ¿En qué cuadrante queda su lado terminal?
2) ¿Cuál es la medida de su ángulo auxiliar?
3) ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde toca al círculo unitario?
4) ¿Cuáles serían las coordenadas del punto donde su lado terminal toca a un círculo con centro en el origen de r=8?
5) ¿Cuál es la medida de un ángulo negativo coterminal al ángulo dado?

Soluciones:

1) Cada cuadrante comprende un ángulo de 90 grados. Si dividimos 315 entre 90 obtenemos 3.5, lo que indica que es un ángulo que está más allá del tercer cuadrante, es decir, en el cuarto cuadrante, porque al ser positivo, se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si el ángulo fuera negativo, -315°, se mediría en sentido contrario y el lado terminal quedaría en el primer cuadrante.



2) Al quedar el ángulo θ en el cuarto cuadrante, el ángulo auxiliar α sería

$$360° - 315° = 45°$$

3) En el círculo unitario la coordenada en x es el valor del coseno del ángulo θ y la coordenada en y es el seno θ.

$$x = \text{Cos } 315° = 0.7071 \qquad y = \text{Sen } 315° = -0.7071$$

Observa que si calculas el seno y coseno del ángulo auxiliar $\alpha=45°$, el valor absoluto sería igual a los valores de seno y coseno de 315°.

4) En este caso, si el círculo ya no es unitario, es decir de r=1, sino de r=8.

$$x=r\cos\theta= 8\cos 315°= 8\,(0.7071)=5.657$$

$$y=r\,\text{sen}\theta= 8\,\text{sen}\,315°= 8(-0.7071)=-5.657$$

5) Un ángulo coterminal a otro es el que termina en la misma posición, en este caso si tenemos que girar en sentido de las manecillas, empezando en el semieje x positivo, tendríamos que avanzar solo 45° en sentido horario. Por lo tanto, un ángulo coterminal al ángulo que mide 315° es -45°. Si nos pidieran otro ángulo negativo coterminal, bastaría con dar una vuelta completa más en el sentido de las manecillas para llegar al lado terminal de θ de nuevo, entonces otro ángulo coterminal negativo seria –(360°+ 45°) = -405°. Es importante que sepas que todos los ángulos coterminales tienen los mismos valores de sus funciones trigonométricas. Es decir:

Sen 315° = Sen (-45°) = sen (-405°)

Lo mismo ocurre para las demás funciones trigonométricas.

Actividades de Apertura

1. En el sistema de coordenadas rectangulares representa los siguientes ángulos y sus respectivos ángulos auxiliares: Utiliza un sistema para cada ángulo y su ángulo auxiliar:

a) 130° b) 250° c) -20° d) 320° e) 500° f) -460°.

2. Para cada uno de los ángulos del apartado A y sus ángulos auxiliares, calcule las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente.

Actividades de Desarrollo

1. Considera que x, y son las coordenadas de puntos que forman parte de una circunferencia de radio 1 y además son puntos del lado terminal del ángulo θ en posición estándar. Completa la información faltante en la tabla que se muestra a continuación.

x	y	Sen	Cos	Tan	Θ (grados)	Θ (radianes)
$\frac{2}{5}$						
	$\frac{3}{4}$					
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
			$-\frac{1}{2}$			
$-\frac{3}{5}$						
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$					
$\frac{2}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$					

2. Para cada ángulo θ del apartado A, en posición normal y cuyo lado terminal corta una circunferencia con centro en el origen de radio 5, calcula las coordenadas del punto que queda sobre la circunferencia y el lado terminal.

Actividades de cierre

1. Considera que x, y son las coordenadas de puntos que forman parte de una circunferencia de radio r y además son puntos del lado terminal del ángulo θ en posición estándar. Completa la información faltante en la tabla que se muestra a continuación.

x	y	r	Sen	Cos	Tan	Θ (grados)	Θ (radianes)
	10						
		8	$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
	-5			$-\frac{1}{2}$			
-12					-1		
-6	-8						
		12				240	

Actividades de contexto o Transversales

Debido a la cuarentena por la Pandemia de Coronavirus, un alumno del CETis 128, de Nogales Sonora se encuentra aburrido. Melancólicamente da vuelta a la llanta de su bicicleta, la cual tiene un radio de 14 pulgadas. Se imagina yendo raudo y veloz a la tienda de Toño, entre otras cosas. Al verlo sin ocupación, sus padres solicitan al maestro de Matemáticas, por medio del WhatsApp, que le envíe algún problema para que el pobre muchacho no caiga en depresión.

Aquí están algunos problemas que le envió el profesor:

1. Si la tienda de Toño está a 300 metros de distancia y en tu bicicleta puedes viajar a 40 km/h.

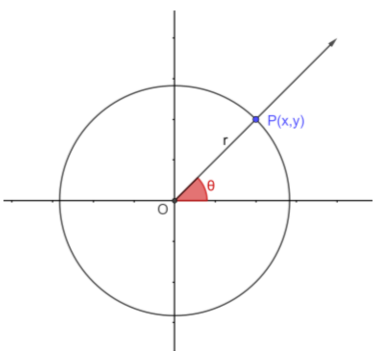
   a) ¿Cuánto tardarás en hacer el viaje de ida y vuelta a la tienda?
   b) ¿Cuántas vueltas dará cada una de las llantas para hacer el viaje?
   c) ¿Cuál sería la medida del ángulo auxiliar α correspondiente al ángulo θbarrido por la llanta?
   d) Si antes de empezar el viaje, te aseguras de que el pivote de la llanta está en la posición del lado positivo del eje X, considerando que el eje o centro de la llanta está en el origen del sistema de coordenadas, ¿a qué altura del piso queda el pivote cuando terminas el viaje a la tienda?

2.3 Signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes del sistema de coordenadas rectangulares

Introducción

Como ya tratamos anteriormente, las coordenadas de los puntos de una circunferencia de radio 1 con centro en el origen, se corresponden con los valores del coseno y el seno de los ángulos en posición normal. Como las coordenadas de esos puntos tienen un signo positivo o negativo según el cuadrante del sistema de coordenadas al que pertenezcan, descubrimos que las funciones trigonométricas pueden ser negativas o positivas de acuerdo con el cuadrante donde queda el lado terminal del ángulo θ.

En las siguientes imágenes se muestran los signos de las funciones trigonométricas en cada cuadrante:



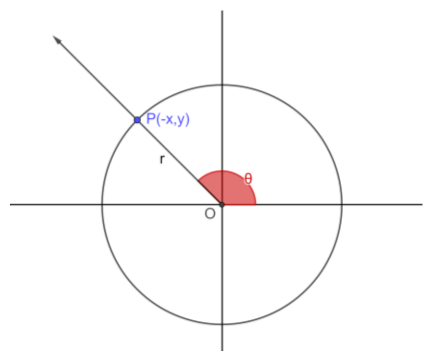
Cuadrante I:

Las funciones trigonométricas serán positivas porque la abscisa X y la ordenada Y son positivas

$$sen\ \theta = \frac{y(+)}{r(+)} \quad \rightarrow \quad sen\ \theta = +$$

$$cos\ \theta = \frac{x(+)}{r(+)} \quad \rightarrow \quad cos\ \theta = +$$

$$tan\ \theta = \frac{y(+)}{x(+)} \quad \rightarrow \quad tan\ \theta = +$$



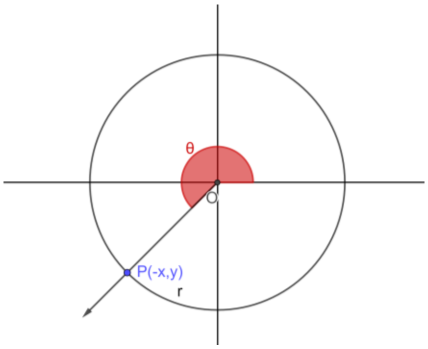
Cuadrante II:

El signo de la abscisa X es negativo y la ordenada Y es positivo. Las funciones son:

$$sen\ \theta = \frac{y(+)}{r(+)} \quad \rightarrow \quad sen\ \theta = +$$

$$cos\ \theta = \frac{x(-)}{r(+)} \quad \rightarrow \quad cos\ \theta = -$$

$$tan\ \theta = \frac{y(+)}{x(-)} \quad \rightarrow \quad tan\ \theta = -$$



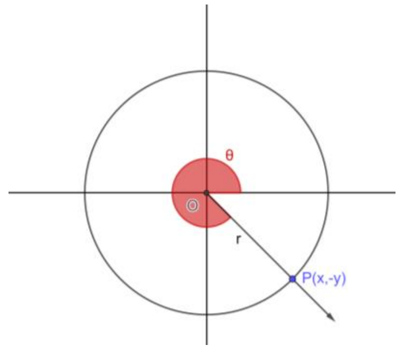
Cuadrante III:

El signo de la abscisa X es negativo y la ordenada Y es negativo. Las funciones son:

$sen\ \theta = \frac{y(-)}{r(+)} \quad \rightarrow \quad sen\ \theta = -$

$cos\ \theta = \frac{x(-)}{r(+)} \quad \rightarrow \quad cos\ \theta = -$

$tan\ \theta = \frac{y(-)}{x(-)} \quad \rightarrow \quad tan\ \theta = +$



Cuadrante IV:

El signo de la abscisa X es positivo y la ordenada Y es negativo. Las funciones son:

$sen\ \theta = \frac{y(-)}{r(+)} \quad \rightarrow \quad sen\ \theta = -$

$cos\ \theta = \frac{x(+)}{r(+)} \quad \rightarrow \quad cos\ \theta = +$

$tan\ \theta = \frac{y(-)}{x(+)} \quad \rightarrow \quad tan\ \theta = -$

Como ya hemos dicho anteriormente, el signo de las coordenadas en x y y en los cuadrantes, corresponde al signo del coseno y el seno de θ respectivamente. Si utilizas las identidades, a partir de los signos anteriores puedes encontrar los signos de todas las funciones. Sin embargo, te los mostramos en la siguiente tabla.

Cuadrante	Sen θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	Sec θ	Csc θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

Para repasar: https://es.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-coord-plane/coordinate-plane-4-quad/v/plot-ordered-pairs

Actividades de Apertura

Localiza en el plano cartesiano los puntos A (-3,1) y B (2,1), ubica el punto C de tal manera que se forme un triángulo rectángulo. Compara tu respuesta con la de tus compañeros y reflexiona ¿Por qué existe un número ilimitado de respuestas para este ejercicio?

Completa los siguientes enunciados según tus conocimientos adquiridos:

1. La función seno solo es ________________ en los cuadrantes ____________, en los demás cuadrantes es _________________.
2. La función _______________ solo es positiva en los cuadrantes ___________, y negativa en los cuadrantes_________________.
3. La función tangente solo es _________________ en los cuadrantes ______________, en los demás cuadrantes es ________________.
4. La función cotangente solo es positiva en los cuadrantes _____________y negativa en los cuadrantes________________.
5. La función secante solo es positiva en los cuadrantes ______________y negativa en los cuadrantes________________.
6. La función cosecante solo es positiva en los cuadrantes ______________y negativa en los cuadrantes___________________.

Actividades de Desarrollo

1. Llena la siguiente tabla, indicando **el signo** de las funciones trigonométrica de los ángulos indicados.

Ángulo	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
460º						
710º						
405º						
-525º						

2. Indica si son correctos los **signos** de las siguientes funciones:

a) $Sen\ 30° = \frac{1}{2}$

b) $Cos\ 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $Tan\ 60° = \sqrt{3}$

d) $Sec\ 240° = -2$

e) $Cos\ 225° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $Cot\ 210° = \sqrt{3}$

g) $Csc\ 135° = -\sqrt{2}$

h) $Cos\ 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

i) $Tan\ 120° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

j) $Sec\ 300° = -2$

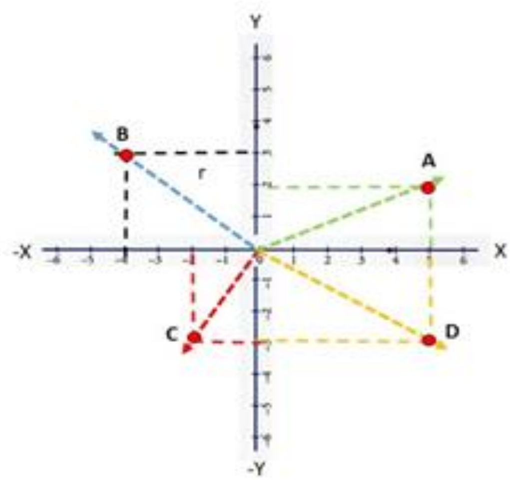
3) Grafica los siguientes puntos: Calcula el valor de las relaciones trigonométricas para cada uno de ellos e indica los signos correspondientes. A (3,1), B (2,3), C (-2,-4), D (4,4)

4) El punto (-8,5) está sobre el lado terminal de un ángulo θ, en posición normal. Determina el valor y los signos de las funciones trigonométricas para dicho ángulo.

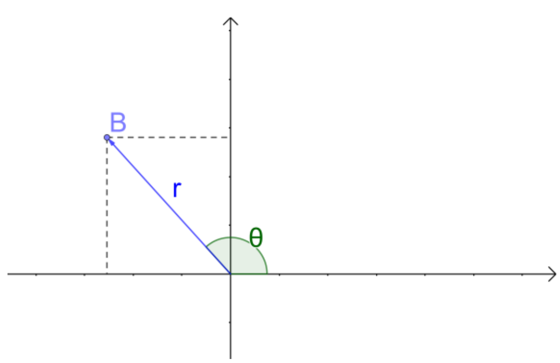
Actividades de cierre

Observa el plano y realiza lo que se te indica:

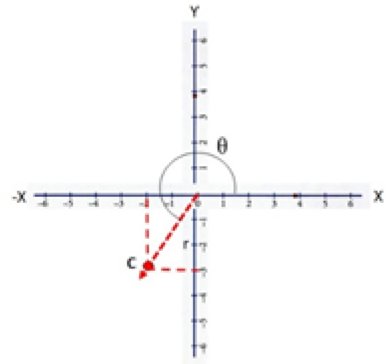
1) Localiza las coordenadas de los puntos A, B, C, y D y calcula las medidas de los ángulos α y θ.



2) El Punto B, está sobre el lado terminal del ángulo θ en posición normal. Determina el valor y los signos de las funciones trigonométricas de θ. También determina la medida de θ.



3) El punto C está en el lado terminal del ángulo θ en posición normal. Determina el valor y los signos de las funciones trigonométricas de θ. y escribe la medida de dos ángulos coterminales de θ, uno positivo y otro negativo.



4) Halla el sen θ, si cos θ = - (4/5) y tan θ es positivo.

Actividades de contexto o Transversales

Arte Cartesiano. Dibuja los puntos en el orden dado y únelos con segmentos.
(1, -3), (5, -4), (4, -3), (9, 1), (7, 2), (8, 5), (5, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 9), (2, 7), (0, 10), (-2, 7), (-4, 8), (-3, 3), (-5, 6), (-5, 4), (-8, 5), (-7, 2), (-9, 1), (-4, -3), (-5, -4), (0, -3), (2, -7), (2, -6), (1, -3)

Ejemplo donde se aplica el plano cartesiano.

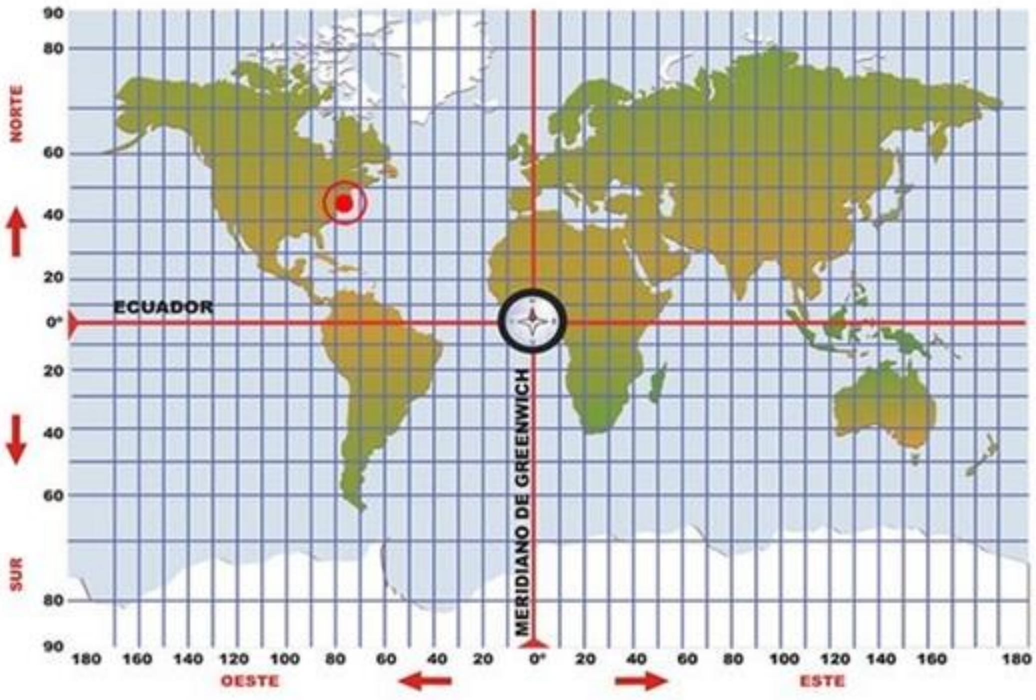


Figura 2.5. Mapa de husos horarios en el mundo. Martínez, (s/f)

Obtén coordenadas latitud y longitud en Google Maps

Si necesitas las coordenadas de algún lugar, puedes obtenerlas directamente en la aplicación Google Maps. Toca sobre el punto o lugar y aparecerán en la parte superior. A partir de allí puedes copiar, guardar o compartir esas coordenadas, también sirven para posicionar una antena satelital y para ingresar las coordenadas de una casa en el software flux. También puedes necesitarlas si estás rastreando tu móvil o revisando tu registro de ubicaciones en este servicio de mapas (ANDRIOD JEFE).

Localiza las coordenadas de tu casa y pega la imagen en tu libreta.

Figura 2.6. Ejemplo de coordenadas en Google Maps, ANDROID JEFE (2018)

Problema 1

Un Topógrafo determina las coordenadas de los vértices de un terreno poligonal, medidas en cientos de metros. Los puntos registrados son los siguientes:
A (-5,4), B (-2,6), C (6,-3) y D (4,8).

Representa gráficamente el terreno.
Calcula la distancia desde el origen hasta cada uno de los vértices del terreno.
Calcula la dirección en que debes caminar para llegar del origen a los vértices del terreno., Considera que la dirección está dada por el ángulo menor de 180° que forma el Norte con la recta que une el origen con cada uno de los vértices del terreno. Ejemplo de dirección: 20° NE significa: 20 grados desde el norte hacia el este.

Problema 2 (Reto)

Considera que Nueva York y Londres están ubicadas a la misma latitud. Utilizando la información del radio de la tierra y lo aprendido hasta ahora, calcula distancia aproximada que separa las dos ciudades, especificando cada uno de los razonamientos seguidos en tu estrategia de solución.

2.3.1 Identidades pitagóricas y relaciones entre las funciones trigonométricas en el círculo

Introducción

Las identidades trigonométricas son relaciones entre las funciones trigonométricas que son válidas para un gran número de valores de los ángulos considerados. Un grupo de identidades fundamentales, llamadas pitagóricas, se deducen a partir de las propiedades del círculo unitario.

Hemos dicho que, en el círculo unitario, las coordenadas de un punto sobre su circunferencia de asocian con los catetos del triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa el valor de su radio, es decir, 1. Si observamos la figura 2.7 y aplicamos el teorema de Pitágoras y las definiciones de las razones trigonométricas para el seno y el coseno, se tiene:

$x^2 + y^2 = 1$, $\cos\theta = x$, $sen\,\theta = y$

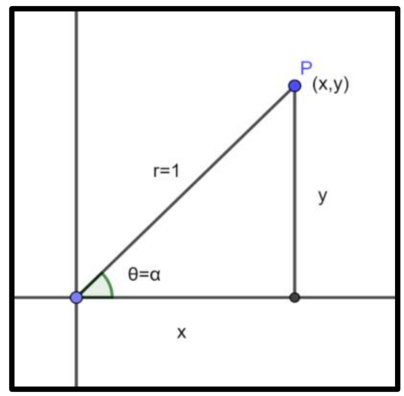


Figura 2.7: Deducción de las identidades pitagóricas

Enseguida, Sustituyendo los valores de x e y en el teorema de Pitágoras resulta:

$(cos\,\theta)^2 + (sen\,\theta)^2 = 1$, o en notación simplificada, $cos^2\,\theta + sen^2\,\theta = 1$

La identidad anterior nos dice que para cualquier valor de θ o ángulo de cualquier nombre, $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ es igual a 1.

A partir de ella, mediante procedimientos algebraicos y otras identidades básicas ya tratadas, podemos encontrar nuevas identidades, muy útiles en la solución de problemas.

Si dividimos ambos miembros de la igualdad anterior entre $cos^2\theta$ tenemos:

$$\frac{cos^2\,\theta}{cos^2\,\theta} + \frac{sen^2\,\theta}{cos^2\,\theta} = \frac{1}{cos^2\,\theta},$$

como sabemos que $\frac{sen\theta}{cos\theta} = tan\,\theta$ y $\frac{1}{cos\theta} = sec\,\theta$ entonces:

$$\mathbf{1 + tan^2\theta = sec^2\theta}$$

Si repetimos todo el procedimiento anterior, ahora dividiendo la identidad original entre sen²θ,y usando las identidades básicas apropiadas, llegamos a

$$\boldsymbol{cot^2\theta + 1 = csc^2\theta}$$

A estas tres expresiones y cualquiera derivada de ellas por el despeje de algún término se les llama **Identidades pitagóricas.**

Son utilizadas frecuentemente en cálculos técnicos, también se encuentran aplicadas en las máquinas que manejan el ritmo cardíaco en los hospitales, se usan en las profesiones de la construcción, topografía e ingeniería y ciencias en general. .

Anteriormente hemos mencionado constantemente la relación entre el ángulo θ y el ángulo auxiliar α. Sabemos que α es siempre un ángulo entre 0 y 90 grados. Conociendo el valor de alguno de ellos, podemos encontrar el valor del otro usando las identidades adecuadas para cada cuadrante, sabiendo que la coordenada en x es el valor del coseno y la coordenada en y es el valor del seno en el círculo unitario.
Las relaciones se muestran en la siguiente tabla.

	I cuadrante	II cuadrante	III cuadrante	iv cuadrante
seno	$sen\ \theta = sen\ \alpha$	$sen\ \theta = sen\ (180 - \alpha)$ $sen\ \theta = sen\ \alpha$	$sen\ \theta = sen\ (180 + \alpha)$ $sen\ \theta = -sen\ \alpha$	$sen\ \theta = sen\ (360 - \alpha)$ $sen\ \theta = -sen\alpha$
coseno	$cos\ \theta = cos\alpha$	$cos\ \theta = -cos\alpha$	$cos\ \theta = -cos\alpha$	$cos\ \theta = cos\ \alpha$

Para repasar: https://es.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-trig-functions/alg-pythagorean-identity/a/pythagorean-identity-review

Actividades de Apertura

1. El valor del seno de un ángulo es -0.8450. Utilizando las identidades trigonométricas conocidas hasta aquí, calcula el valor del coseno y la tangente del ángulo y dos posibles medidas de dicho ángulo

2. Un punto sobre una circunferencia de radio 6 y centro en el origen tiene coordenada x= - 3.5, Calcula las otras posibles coordenadas del punto y las medidas de ɵ y alfa.

Actividades de Desarrollo

1. Demuestra que la identidad pitagórica $Tan\ 2\theta + 1 = Sec\ 2\theta$, con base en el teorema de Pitágoras y el círculo unitario.

2. Si la $Cot\ \theta = \frac{5}{3}$, calcula:

a) Los valores de la tangente, seno y coseno.

b) Las coordenadas de un punto situado sobre una circunferencia de radio 4.

c) La medida del ángulo θ.

Actividades de cierre

1. ¿Crees que las personas que diseñan y hacen piezas de autos utilizan las funciones trigonométricas? Menciona 3 ejemplos de cómo y/o para que se pueden usar.

2. Usa tu calculadora para comprobar las identidades siguientes: $Sen\,2\theta + Cos\,2\theta = 1$, $\tan\theta = \frac{sen\,\theta}{\theta}$ para los siguientes valores de θ:

90°, 50°, 120°, 150°, 210°, 300°

Actividades de contexto o Transversales

Discute con tus compañeros sobre la aplicación de las funciones trigonométricas a alguna problemática de tu entorno. Asimismo, planteen situaciones a las que se podrían enfrentar y propongan una solución.

Utiliza las TIC'S para investigar, ejemplos de aplicaciones en la vida cotidiana de las funciones trigonométricas.

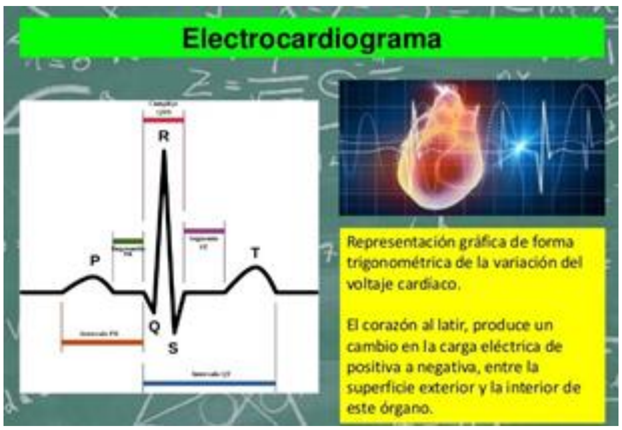
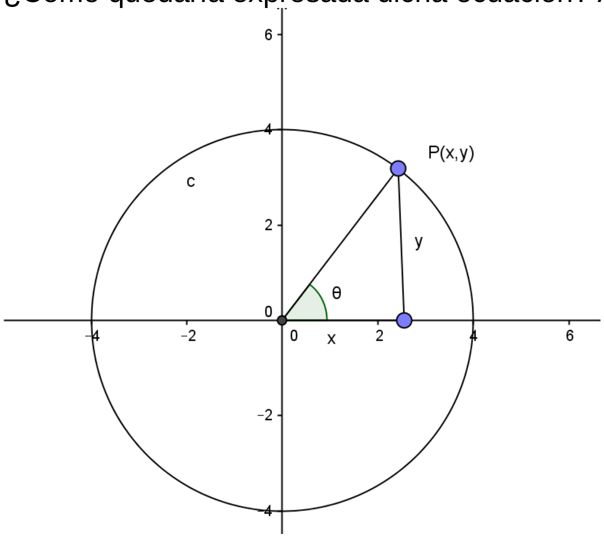


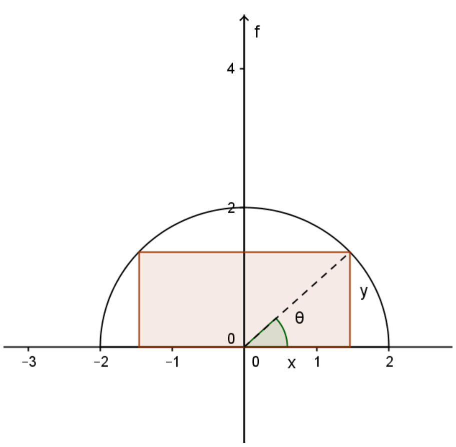
Figura 2.8: Ejemplo de aplicaciones en la vida cotidiana de las funciones trigonométricas. Netto (2020)

Para consultar. https://www.slideshare.net/Danielalejandrocelic/aplicacin-de-las-funciones-trigonometricas-en-la-arquitectura

En muchas situaciones que se presentan en los campos de la ingeniería y de la ciencia, las magnitudes o variables del problema a resolver requieren de analizar el comportamiento de un ángulo. Por lo general, para incluir el ángulo, como parte de la expresión matemática debemos de usar las funciones trigonométricas.

1. La ecuación de una circunferencia con centro en el origen, en relación con las coordenadas rectangulares de sus puntos, está dada por la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Si queremos, que la ecuación muestre la relación de los puntos, con el ángulo ɵ que forma el radio con el lado positivo del eje x, ¿Cómo quedaría expresada dicha ecuación? Auxíliese con la figura mostrada.





2. Un rectángulo se haya inscrito en un semicírculo de radio 2. Observe la figura.

- Determina la expresión del área del rectángulo en función del ángulo ɵ, siendo este un ángulo entre 0 y 90 grados.

- Calcula el área del rectángulo para ɵ =20, 40, 60 y 80 grados.

Ejercicios Adicionales

1. La parte más baja de una rueda de la fortuna está a dos metros de altura del suelo. El diámetro de la rueda es de 20 metros. Las sillas están igualmente espaciadas y sujetas a un eje sobre la circunferencia de la rueda y por un soporte recto de acero al centro de la rueda. Cada silla, queda metro y medio por debajo de dicho eje. Considere el origen del sistema de coordenadas en el centro de la rueda.

Determina:

a) Las coordenadas que denotan la posición de los ejes que sujetan las sillas.

b) Los ángulos que forman los soportes de los ejes de cada silla, si estos se encuentran soldados al centro de la rueda.

c) La expresión algebraica para calcular la altura de cualquiera de las sillas de acuerdo con el ángulo que forma su soporte con el lado positivo del eje horizontal.

d) El valor del ángulo que forma el soporte cuando la silla está a 10 metros de altura.

e) La altura de la silla, cuando su soporte forma un ángulo de 75 grados con la horizontal.

2.4 Identidades fundamentales

2.4.1 Identidades trigonométricas y su uso para simplificar ecuaciones trigonométricas

Introducción

Hasta aquí, tenemos ya un conjunto de identidades a las que se denominan fundamentales, dado que son la base para encontrar otras más complejas, como las identidades de la suma y resta de ángulos, del ángulo doble, ángulo mitad, etc.

A continuación, transcribimos estas identidades.

1. $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ 2. $\csc\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$ 3. $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ 4. $\tan\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$

5. $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{sen\,\theta}$ 6. $sen^2\,\theta + cos^2\,\theta = 1$ 7. $1 + tan^2\,\theta = sec^2\,\theta$

8. $cot^2\,\theta + 1 = csc^2\,\theta$

Ya hemos dicho que las identidades son herramientas necesarias para simplificar procesos algebraicos en los que se requiere determinar el valor de ángulos que definen el comportamiento de variables que afectan distintos fenómenos que estudia la ciencia, especialmente los que tiene comportamiento periódico, es decir, que sus valores se repiten en un cierto lapso.

Practicar la simplificación de expresiones trigonométricas es un entrenamiento esencial para resolver ese tipo de problemas.

La principal técnica para resolver ecuaciones trigonométricas consiste en transformar la ecuación de manera que se conserve solo una función trigonométrica simple, generalmente el seno o el coseno lo más simplificada posible.

Mostraremos algunos ejemplos de esta técnica.

Ejemplo 1: Transformar la expresión $\frac{sec\,\theta - csc\theta}{sec\theta\ csc\theta} = sen\,\theta - cos\,\theta$

Observemos que afortunadamente el lado derecho ya tiene solo senos y cosenos.

De las identidades fundamentales sabemos que

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ y $\csc\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$ sustituyendo en el lado izquierdo, tenemos:

$$\frac{\frac{1}{cos\theta}-\frac{1}{sen\theta}}{\frac{1}{cos\theta}\cdot\frac{1}{Sen\theta}} = sen\ \theta - cos\ \theta$$

ahora restando las fracciones del numerador y multiplicando en el denominador:

$$\frac{\frac{sen\theta - cos\theta}{cos\theta sen\theta}}{\frac{1}{cos\theta sen\theta}} = sen\ \theta - \cos\theta$$

enseguida aplicando la ley de las proporciones y cancelando el producto del coseno y seno.

$$sen\ \theta - \cos\theta = sen\theta - \cos\theta$$

por lo que comprobamos que la expresión es una identidad, ya que ambos miembros de la igualdad original tienen el mismo valor.

Ejemplo 2: $sen\ \theta \csc\theta - cos^2\theta = \frac{1}{2}$

Primero sustituimos la csc ɵ por su identidad:

$$sen\ \theta\ \frac{1}{sen\ \theta} - cos^2\ \theta = \frac{1}{2}$$

Simplificando:

$$1 - cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

Como la expresión de la izquierda equivale a sen^2ɵ,despejando el seno cuadrado de la identidad 6, se tiene que:

$$sen^2\theta = \frac{1}{2}$$

Si sacamos raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación:

$$sen\theta = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.70710$$

Y entonces nos damos cuenta de que las soluciones de la ecuación son los ángulos que tengan como valor del seno 0.70710, es decir:

$$\theta = sen^{-1}(0.70710)$$

Decimos que hay varios valores, de theta que cumplen la ecuación porque recuerden que en el círculo se pueden generar varios ángulos que tengan el mismo lado terminal. Si tomamos solo los valores que quedan entre 0 y 360 grados, el cual es el periodo de la función seno, tenemos que, dado que θ debe tener el valor del seno positivo, y el seno es positivo en el primero y segundo cuadrante, obtenemos el valor del ángulo auxiliar alfa para luego determinar los valores de θ.

Por lo tanto, dado que

$$sen^{-1}(0.70710) = 45°$$

Las soluciones o valores de theta que quedan en el primero y segundo cuadrante son:

Primer cuadrante: $\theta = \alpha = 45°$

Segundo cuadrante: $\theta = 180° - \alpha = 180° - 45° = 135°$

Actividades de Apertura

1. Comprueba paso por paso que la siguiente igualdad es una identidad trigonométrica:

$$Sen\, x = \frac{\text{Cos}\, x}{Ctg\, x}$$

2. Comprueba paso por paso que la siguiente igualdad es una identidad trigonométrica:

$$Sen\, A + \text{Cos}\, A\, Ctg\, A = \text{Csc}\, A$$

Actividades de Desarrollo

Desarrolla las siguientes identidades trigonométricas para su comprobación:

$\frac{\csc\beta}{tan\beta + ctg\beta} = cos\beta$	$sen\,x\,(1+\cot x) = senx + cosx$	$(1+\tan^2\beta)cos\beta = sec\beta$

Actividades de cierre

1. Si tienes acceso a Internet, analiza el video de YouTube del enlace https://www.youtube.com/watch?v=1UIxKAEo30k

2. Copia el desarrollo en tu cuaderno.

3. Verifica las siguientes identidades:

a) $\tan\theta cot\theta - cos^2\theta = sen^2\theta$ $\quad$ $b)$ $\frac{sec\theta}{\csc\theta} + \frac{sen\,\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta$ $\quad$ $c)$ $(\csc\alpha + \cot\alpha)(csc\ \ \alpha - \cot\alpha) = 1$

d) $1 - \frac{sen^2\beta}{1+\cos\beta} = \cos\beta$ $\quad$ e) $\frac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = sen^2\theta - cos^2\theta$ $\quad$ f) $\frac{cos^2\alpha - sen^2\alpha}{1 - tan^2\alpha} = cos^2\alpha$

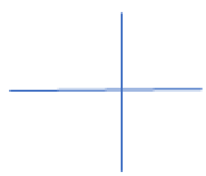
2.5 Resolución de triángulos oblicuángulos

2.5.1 Ley de Senos

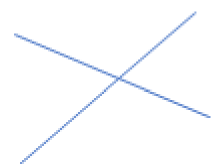
2.5.1.1 Relaciones para la ley de senos

Introducción

Recordemos que las rectas perpendiculares, aquellas que al cruzarse forman ángulos rectos, por otro lado, las oblicuas no los forman



Perpendicular



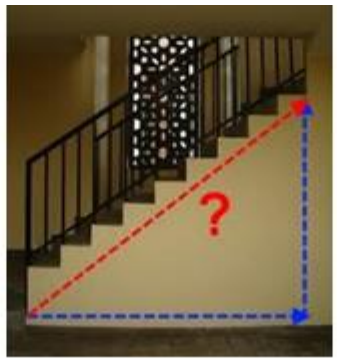
Oblicuas

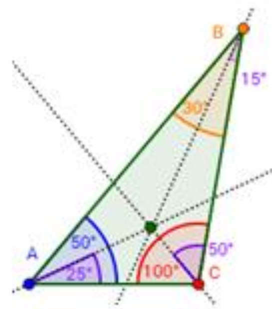
De ahí el nombre de los triángulos, aquellos que tienen rectas perpendiculares y un ángulo recto se llama triángulo rectángulo (que lo estudiamos en sesiones anteriores). Los triángulos que NO tienen ningún ángulo recto los llamamos triángulos oblicuángulos.

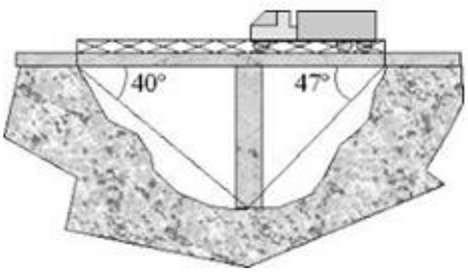
¿Te has preguntado cómo podemos resolver problemas con aquellos triángulos que no tiene un ángulo recto?

Actividades de Apertura

Observa los siguientes triángulos







¿Cuál de ellos son triángulos rectángulos?

____

¿Cuál de ellos son triángulos oblicuángulos?

____

Actividades de Desarrollo

Te mostraremos las estrategias para resolver triángulos oblicuángulos, supongamos que se tiene la necesidad de resolver el triángulo ABC (figura 3). Como se puede observar no tiene un ángulo recto no podemos aplicar las funciones trigonométricas conocidas, pero si le trazamos una altura sobre el lado que sirve de base, observaremos que convierte en dos triángulos, ya que la altura es una perpendicular a la base.

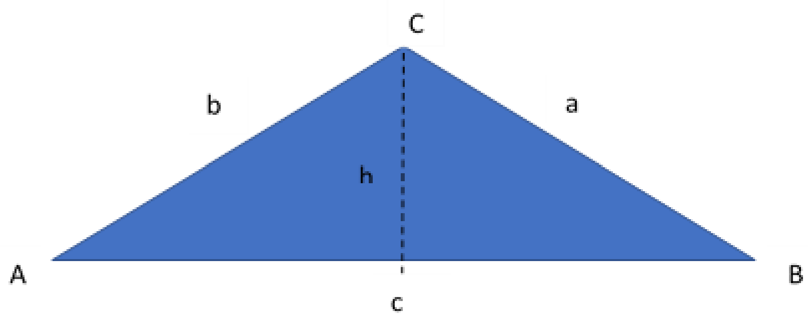


Figura 4.1 Triángulo oblicuángulo

De la figura anterior sabemos

$$sen\ A = \frac{h}{b}$$

$$sen\ B = \frac{h}{a}$$

Despejando h en ambos casos, tendremos:

$$h = b\ sen\ A$$

$$h = a\ sen\ B$$

Igualando las ecuaciones anteriores:

$$b\ Sen\ A = a\ Sen\ B$$

Por lo que $$\frac{Sen\ A}{a} = \frac{Sen\ B}{b}$$

Usando el mismo razonamiento obtenemos $\frac{Sen\ C}{c} = \frac{Sen\ B}{b}$. Así obtenemos la igualdad conocida como

Ley de senos:

$$\frac{sen\ A}{a} = \frac{sen\ B}{b} = \frac{sen\ C}{c}$$

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

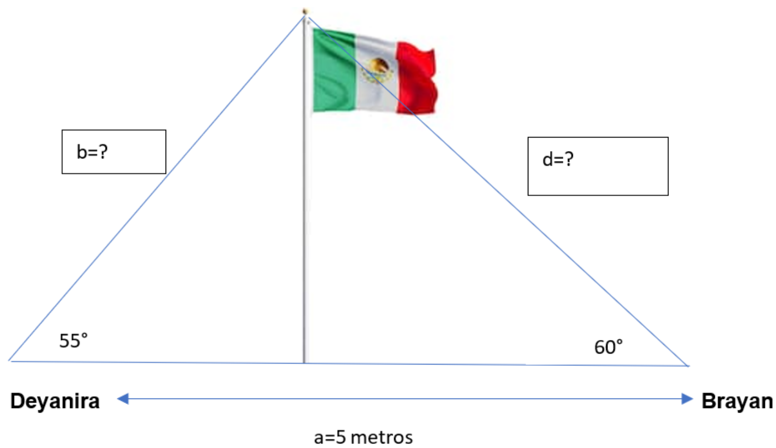
Cuando podemos aplicar la ley de senos:

1. Cuando se conoce un lado y dos ángulos.
2. Cuando se conoce dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Ejemplos:

Brayan y Deyanira se encuentran separados una distancia de 5 metros uno del otro, en el zócalo de la ciudad, ambos con la ayuda del goniómetro miden el ángulo de elevación al punto más alto de la asta bandera. El ángulo medido por Brayan fue aproximadamente de 60° y el medido por Deyanira de 55° aproximadamente. ¿Qué distancia existe desde el punto más alto de la asta bandera al punto donde se efectuó cada medición del ángulo de elevación?

Si realizamos una representación gráfica de la situación (supongamos que la medición se efectuó de la siguiente manera):



Observa que se conocen dos ángulos y un lado, por lo que en este caso puedes aplicar la ley de senos.

Sabemos que el ángulo faltante que llamaremos A, lo encontramos

$$180° = 55° + 60° + A$$

$$A = 180° - 55° - 60° = 65°$$

De la ley de senos:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{d}{sen\ D}$$

Angulo de Deyanira

$$\frac{5}{sen\ 65°} = \frac{d}{sen\ 55°}$$

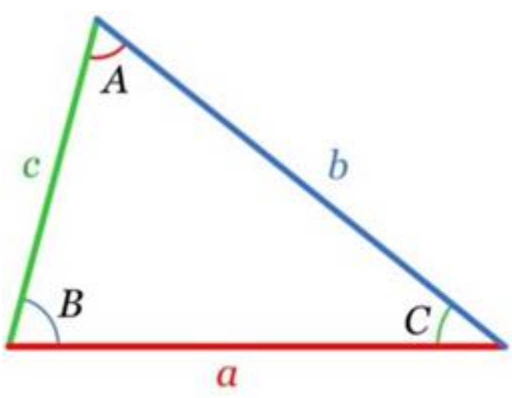
$$d = \frac{(5)(sen\ 55°)}{sen\ 65°} = 4.51m$$

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

$$\frac{5}{\text{sen } 65°} = \frac{\text{b}}{\text{sen } 60°}$$

$$b = \frac{(5)sen\ 60°}{sen65°} = 4.77m$$

Ejemplo 2:



Se tiene el siguiente triángulo con los siguientes datos:

a= ¿? A=¿?

b=93m B=46°

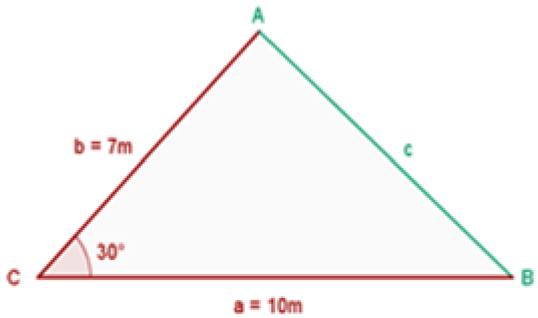
c= 65m C=¿?

Observa que se conocen dos lados y un ángulo, para obtener los elementos faltantes puedes utilizar la ley de senos.

$\frac{sen\,B}{b} = \frac{sen\,C}{c}$ $\frac{sen\,46°}{93} = \frac{sen\,C}{65}$ $sen\,C = \frac{(65)\,sen\,46°}{93} = 0.5027$ $C = 30.178°$ Para el ángulo A: $180° = A + 46° + 30.178°$ $A = 180° - 46° - 30.178°$ $A = 103.82°$	$\frac{b}{sen\,B} = \frac{a}{sen\,A}$ $\frac{93}{sen\,46°} = \frac{a}{sen\,103.83°}$ $a = \frac{(93)\,sen\,103.83°}{sen\,46} = 125.5371$ $a = 125.54\,m$

1. Encuentra los valores faltantes a cada triángulo

a)

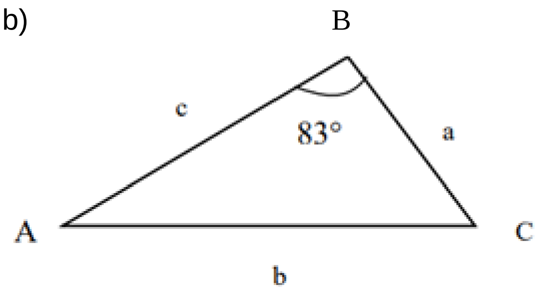


c= ¿? C=30°

a= 10m A=¿?

b=7 m B=¿?

b)

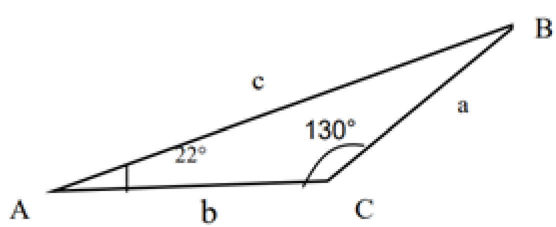


a = 8 A =?

b = 11.29 B =83°

c = ? C =?

c)



a = ? A =22°

b = ? B = ?

c = 80 C =130°

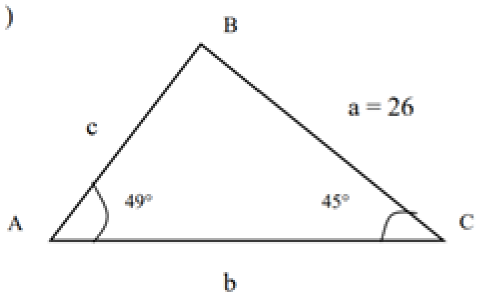
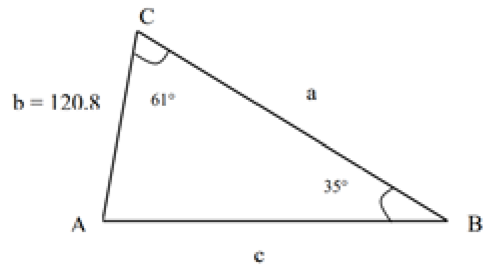
d) Bosqueja el triángulo

a = 68.7 A=?

b = 45 B=38° 57’

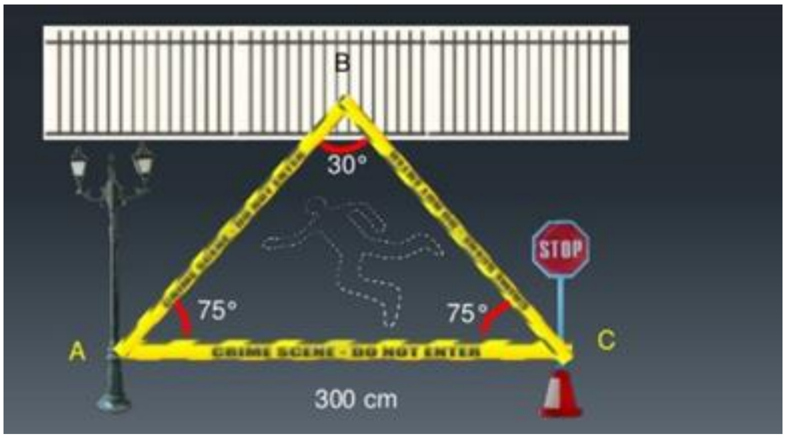
c =? C=?

e)

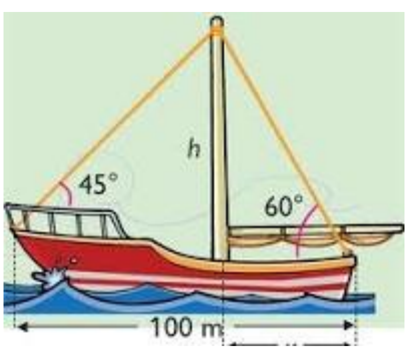
e)  a=26 A=49° c=? C=45° b=? B=?	f)  a= ¿? A=¿? b=120.18 B=35° c=¿? C=61°
g) Bosqueja el triángulo a = ? A = 26° b = ? B = ? c = 18 C = 106°	h) Bosqueja el triángulo a = ? A = ? b = 40 B = 41° c = ? C = 120°

Actividades de cierre

1. En CSI están investigando un crimen de un asesinato como se muestra en la figura, ¿Cuántos metros de cinta se requiere para cercar la escena del crimen?



2. ¿Cuántos metros de cuerda se necesitan para amarrar el mástil de proa a popa?, como se muestra en la figura.



1. Plantea y resuelve los siguientes problemas

a) Juan y Edgar se encuentran entrenando futbol soccer, ambos se encuentran separados una distancia entre si de 8.5 metros, el ángulo de tiro de Juan hacia el centro de la portería es de 58°y el de Edgar hacia el mismo punto es de 55°, si ambos golpean un balón hacia el centro de la portería. ¿Qué distancia recorrerá el balón que golpee Juan? ¿Qué distancia recorrerá el balón golpeado por Edgar?

b) Para encontrar el ancho de un río, un topógrafo establece dos puntos P y Q separados 50 metros en una de las orillas del río; posteriormente elige un punto R en la orilla opuesta y determina la medida del ángulo QPR como 78° y la medida del ángulo RQP como 62°. Determina el ancho del río.

2.5.2 Ley de Cosenos

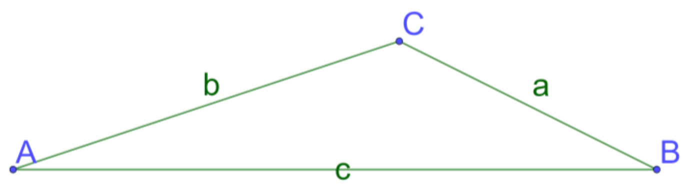
2.5.2.1 Relaciones para la ley de cosenos

Introducción

La ley de cosenos es empleada para la resolución de triángulos oblicuángulos cuando:

- Se conoce la medida de dos lados y el valor del ángulo que forman
- Se conoce el valor de los tres lados

La ley establece que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de esos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado que queremos encontrar. Es posible representarla como:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ CosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ CosB$$

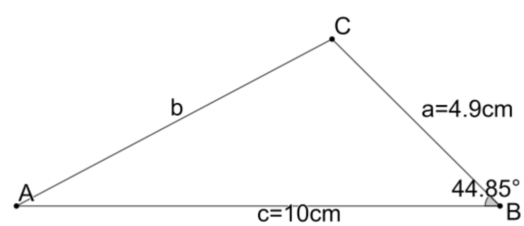
$$c = a^2 + b^2 - 2ab\ CosC$$

Actividades de Apertura

A continuación, realizaremos dos ejemplos sobre la aplicación de la ley de cosenos. El primer caso contaremos con la medida de los dos lados y su ángulo formado.

Ejemplo 1:

Encuentra la medida del lado faltante del siguiente triángulo:



1. Se identifican los datos que el problema nos da:

a= 4.9cm	A= ¿?
b= ______	B= 44.85°
c= 10cm	C= ¿?

2. Para identificar cuál ley de cosenos se empleará en la resolución se debe de verificar con cuáles datos se cuenta, es decir, se cuenta con a, c, B y se busca b. Se selecciona la única ley que involucra a todos esos elementos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ CosB$$

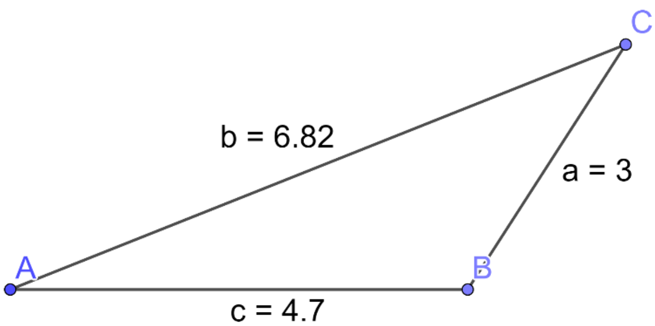
3. Se sustituye y resuelve:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ CosB$$
$$b^2 = (4.9)^2 + (10)^2 - 2(4.9)(10)\ Cos44.85°$$
$$b^2 = 24.01 + 100 - (98)\ Cos44.85°$$
$$b^2 = 24.01 + 100 - (98)(0.7089)$$
$$b^2 = 24.01 + 100 - 69.4776$$
$$b^2 = 54.5323$$
$$b = \sqrt{54.5323}$$
$$b = \mathbf{7.3846cm}$$

Ejemplo 2:
Encuentra la medida del ángulo C del siguiente triángulo:

1. Se identifican los datos que el problema nos da (las medidas están dadas en cm):

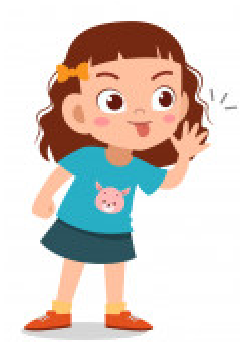
a= 3cm	A=¿?
b= 6.82cm	B=¿?
c=4.7cm	C=________



2. Verificamos los elementos con los que contamos, es decir, tenemos a, b, c y buscamos C. Se selecciona la única ley que involucra a todos esos elementos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ CosC$$

3. Se sustituye y resuelve:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ CosC$$

$$(4.7)^2 = (3)^2 + (6.82)^2 - 2(3)(6.82)\ Cos\ C$$

$$22.09 = 9 + 46.5124 - 40.92\ Cos\ C$$

$$22.09 = 55.5124 - 40.92\ Cos\ C$$

$$22.09 - 55.5124 = -40.92\ Cos\ C$$

$$-33.4224 = -40.92\ Cos\ C$$

$$\frac{-33.4224}{-40.92} = Cos\ C$$

$$0.8166 = Cos\ C$$

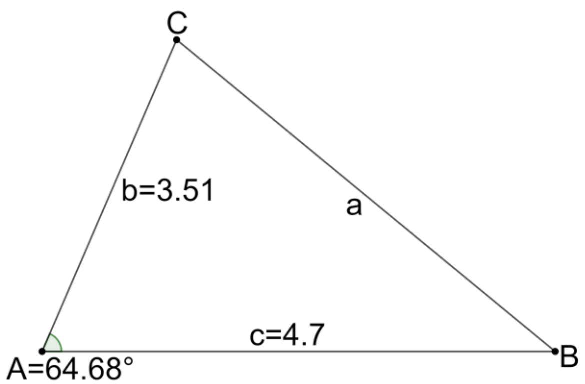
$$Cos^{-1}(0.8166) = C$$

$$35.2541° = C$$

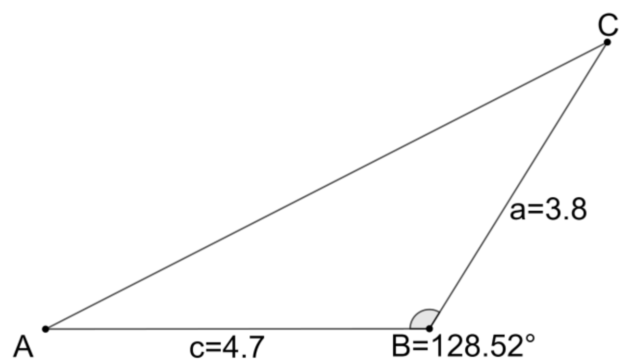
Actividades de Desarrollo

Resuelve los siguientes ejercicios sobre ley de cosenos recordando los 3 pasos sugeridos para la solución: 1) Identificar datos 2) Identificación de ley a emplear 3) Sustitución y resolución.

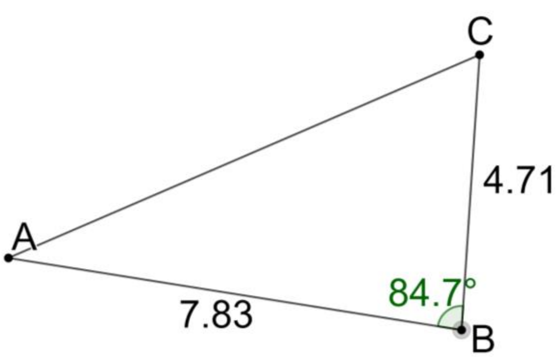
a) Encuentra el valor del lado faltante:



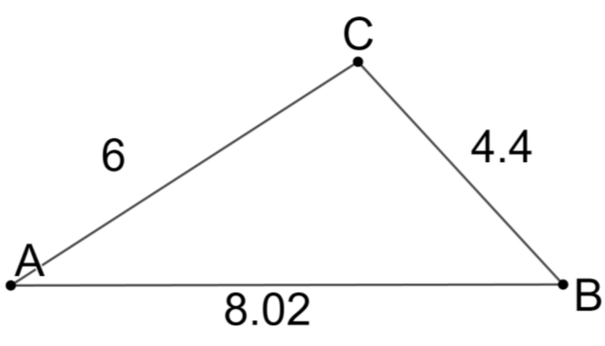
b) Encuentra el valor del lado faltante:

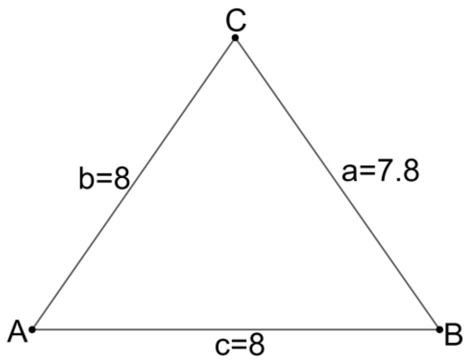
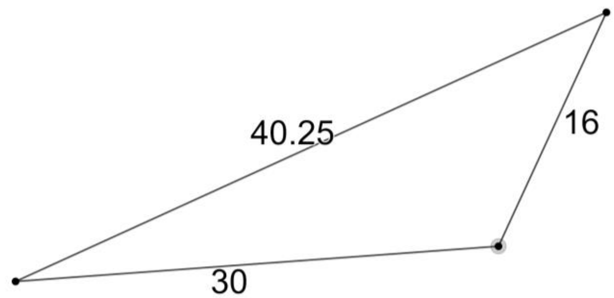


c) Encuentra el valor del lado faltante:



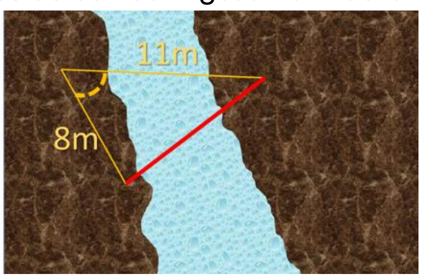
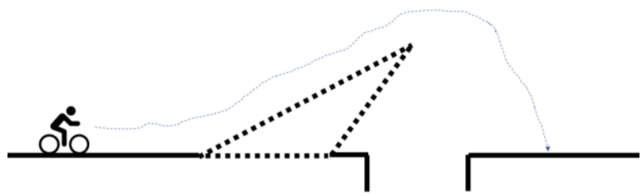
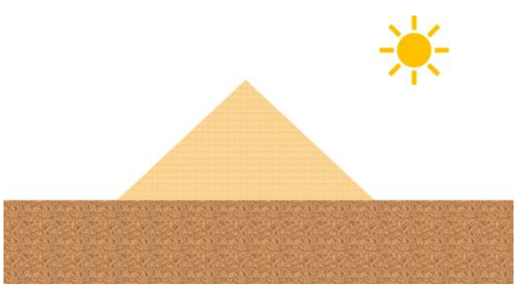
d) Encuentra el valor del ángulo C:

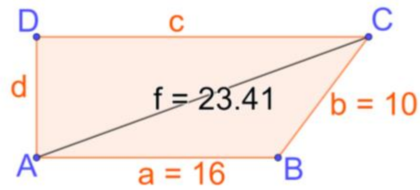


e) Encuentra el valor del ángulo A:	f) Encuentra el valor de los tres ángulos:
	

Actividades de cierre

1. Resuelve los siguientes problemas de aplicación utilizando la ley de cosenos:

<table>
<tr>
<td>a) Con el objetivo de cruzar un río caudaloso, el equipo de rescate del bosque Miller ha decidido utilizar la trigonometría para usar la cuerda de rescate (roja) apoyándose de las cuerdas de soporte (amarillas) y cruzar personas. Se conoce que la medida de las cuerdas amarillas de 11m y 8m y la medida del ángulo que forman es de 59.1907° ¿cuánto mide la cuerda roja?

</td>
<td>b) El siguiente diagrama representa el salto que el deportista Irving Acosta desea realizar sobre una rampa para cruzar un abismo. Se conoce la medida de los tres postes de la rampa a construir, las medidas son: 5m, 6m y 9m. Calcula los tres ángulos internos de la rampa:
</td>
</tr>
<tr>
<td>c) Se sabe que la pirámide de Giza tiene las siguientes dimensiones: aristas 230m y el ángulo que forman en la punta es de 73.7398°. Con ayuda de la ley de cosenos, calcula la medida de la base de la pirámide.
</td>
<td>d) Encuentra la medida de todos los ángulos internos de un triángulo que tiene sus lados con las siguientes medidas: 25cm, 26cm y 17cm.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>e) Miguel González posee vigas metálicas de 2m, 3m y 1.16m y desea construir un triángulo sin doblar ni recortar ninguna viga ¿cuáles serán las medidas de los tres ángulos de la figura?</td>
<td>f) Se desea conocer la medida del ángulo B de la siguiente figura ¿cuál es su medida?

</td>
</tr>
</table>

Actividades de contexto o Transversales

Con los temas estudiados hasta ahora de la trigonometría (razones trigonométricas, identidades pitagóricas y resolución de triángulos rectángulos), los pondremos en práctica para comprobar su utilidad en la determinación de magnitudes físicas.

a) Un aeroplano vuela a 170 km/s hacia el nordeste, en una dirección que forma un ángulo de 52°con la dirección este. El viento está soplando a 30 km/h en la dirección noroeste, formando un ángulo de 20° con la dirección norte. ¿Cuál es la "velocidad con respecto a tierra" real del aeroplano y cuál es el ángulo A entre la ruta real del aeroplano y la dirección este?
Ayuda: La velocidad con respecto a tierra es la diagonal del paralelogramo formado por la velocidad del viento y la velocidad del avión cuando se trasladan entre sus extremos, sin cambiar su dirección.

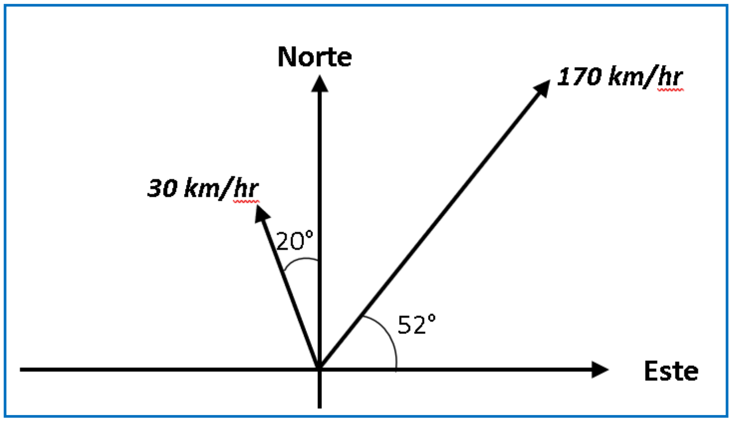


Figura 4.2: Esquema del desplazamiento del aeroplano

b) Dos ciclistas viajan parejos por un sendero recto a 40 km/hora. El ciclista A, toma una desviación hacia la izquierda, que forma un ángulo de 30 grados con el sendero. El ciclista B, 5 minutos después, toma otra desviación hacia la derecha, la cual forma un ángulo de 10 grados con el sendero. Calcula:

i) La distancia que separa a los dos ciclistas 10 minutos después de que el ciclista A toma la desviación.

Si ambos ciclistas acuerdan regresar al sendero 3 kilómetros delante de la primera desviación, que distancia deben de recorrer si empiezan a regresar (en línea recta) 10 minutos después de que el ciclista A toma la desviación.

ii) ¿Cuál es el ángulo que forman las trayectorias de regreso con el sendero?

iii) ¿Con cuántos minutos de diferencia llegan los ciclistas al sendero?

2.5.2.2 Cálculo del área de un triángulo conociendo sus tres lados por la fórmula de Herón

Introducción

La fórmula empleada usualmente para la obtención del área de un triángulo es:

$$\acute{A}rea = \frac{base \cdot altura}{2}$$

y proviene de la fórmula para calcular el área de un rectángulo, solamente se divide entre dos. Esta fórmula indica que se debe de conocer la base y la altura de un triángulo, sin embargo, cuando desconocemos la altura y sabemos la medida de sus lados conviene utilizar la fórmula de Herón para el cálculo del área. La fórmula se le atribuye a Herón de Alejandría y se enuncia:

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

Donde:

$A = \acute{A}rea$

$S = Semiperímetro\ (mitad\ del\ Perímetro)$

$a = lado\ a$

$b = lado\ b$

$c = lado\ c$

Actividades de Apertura

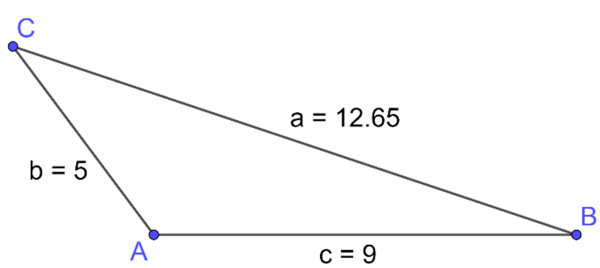
Encuentra el área del siguiente triángulo escaleno considerando las medidas en cm:

1. Primero identificamos los datos

$a = 12.65cm$

$b = 5cm$

$c = 9cm$



2. Se obtiene el perímetro y se divide entre dos para obtener el semiperímetro:

$$P = 26.65cm$$

$$S = \frac{26.65cm}{2}$$

$$S = 13.325cm$$

3. Se sustituye en la fórmula y se realizan las operaciones:

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$A = \sqrt{13.325(13.325-12.65)(13.325-5)(13.325-9)}$$

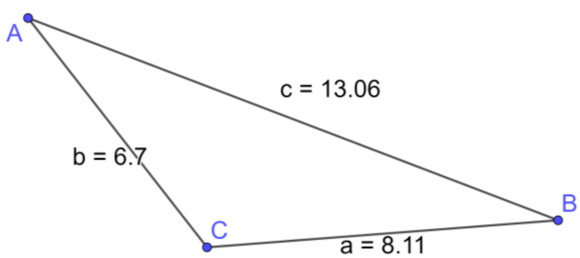
$$A = \sqrt{13.325(0.675)(8.325)(4.325)}$$

$$A = \sqrt{323.8480}$$

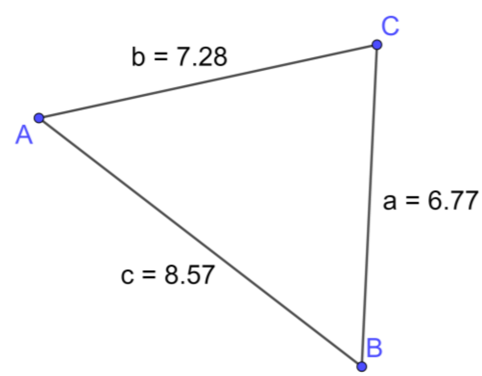
$$A = 17.9957cm^2$$

Actividades de Desarrollo

1. Utiliza la fórmula de Herón para obtener el área de los siguientes triángulos:



a) Encuentra el área del triángulo



b) Encuentra el área del triángulo

Calcula el área de un triángulo escaleno que tiene las medidas de los lados como: 11cm, 6cm y 9cm.

¿Cuál es el área de un triángulo si sus lados miden 8.5cm, 6.77cm y 5.84cm?

Actividades de cierre

1. Encuentra la medida del área de un triángulo equilátero de 8cm de lado. Resuelve este ejercicio de dos formas diferentes:

a) Solución utilizando la fórmula de Herón:

b) Solución utilizando el teorema de Pitágoras para obtener la altura y después utilizar $A = \frac{b \cdot h}{2}$

2. Encuentra la medida del área de un triángulo equilátero de 12cm de lado. Resuelve este ejercicio de dos formas diferentes:

a) Solución utilizando la fórmula de Herón:

b) Solución utilizando el teorema de Pitágoras para obtener la altura y después utilizar $A = \frac{b \cdot h}{2}$

Glosario

Ángulo
Figura geométrica formada por dos rectas o dos planos que se cortan respectivamente en una superficie o en el espacio.11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78

Cateto
Cada uno de los dos lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.12, 13, 15, 18, 20, 32, 33, 34, 36, 37, 43

Cociente
Resultado que se obtiene al dividir una cantidad por otra, y que expresa cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo...12, 34

Cosecante
Inversa del seno de un ángulo o de un arco. 39, 51

Coseno
Seno del complemento de un ángulo o de un arco.15, 32, 35, 40, 44, 45, 46, 49, 50, 56, 57, 58, 62, 63, 73

Cotangente
Inversa de la tangente de un ángulo o de un arco. 51

Diagonal
Dicho de una línea recta
Que une dos vértices no contiguos de un polígono, o de distinta cara en un poliedro......23, 30, 78

Ecuación
Igualdad que contiene una o más incógnitas.. 20, 31, 38, 60, 62, 63

Geogebra
Programa informático educativo usado para resolver o graficar elementos matemáticos. 14

Herón
Ingeniero y matemático helenístico que destacó en Alejandría. 4, 79, 80, 81

Hipotenusa
Lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo.11, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 32, 33, 34, 36, 37, 43, 56

Horizontal
Paralelo al horizonte...16, 19, 41, 61

Fuentes consultadas

Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F. V., Gallegos Ruíz, H. A., Cerón Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2009). *Aritmética.* México: Pearson.

Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F. V., Gallegos Ruíz, H. A., Cerón Villegas, M., & Reyes Figueroa, R. (2009). *Geometría y Trigonometría.* México: Pearson.

ANDRIOD JEFE., (2 de marzo 2018), *Cómo obtener coordenadas en Google Maps Android*.[Entrada en un Blog], Recuperado de**:** https://www.androidjefe.com/obtener-coordenadas-google-maps/

Baldor, A., (1997), *Geometría plana y del espacio y Trigonometría*, México, Publicaciones Cultural, S. A. de C. V.

Cuéllar, J. A. (2019). *Matemáticas 2.* México: McGrawHill

Dennis, G., Dewar, J. (1992). *Álgebra y Trigonometría*. Santafé de Bogotá: McGraw-Hill.

Dieter, Sacher, H. (s.f.). *Potencia en contextos cotidianos*. Recuperado el 19 de mayo de 2016, de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-20433_recurso_pauta_pdf.pdf

Duarte, Sánchez, J. M. (2010). *Secuencia didáctica para promover el aprendizaje del objeto matemático potencia con base en el Análisis Didáctico.* Hermosillo, Sonora.

Jiménez, C. y Ortega., O., (2018), *Matemáticas II*, México, Grupo Editorial Mx.

Netto, R. (2020). *Fisicanet.* Argentina. n/a Recuperado de: https://www.fisicanet.com.ar/matematica/trigonometria/ap01-identidades-trigonometricas.php

Martínez, C., (s/f), DOCENTECA *Coordenadas geográficas*, Recuperado de https://www.pinterest.es/pin/358036239122165509/

Rivera, E., (2012), *Matemáticas II,* México, Gafra Editores.

Sullivan, M. (1997). *Trigonometría y Geometría Analítica. 4ta edición.* México: Prentice-Hall

Directorio

Dr. Rafael Sánchez Andrade
Jefe de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial y de Servicios

Ing. Luis Miguel Rodríguez Barquet
Director Académico de Innovación Educativa

Mtra. Laura Leal Sorcia
Subdirectora de Innovación Académica

MC Gerardo Valdés Bermudes
Presidente de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

MC Luis Manuel Guerra Franco
Secretario de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

ME Martin Vega Gómez
Coordinador de la Mesa de trabajo de Geometría y Trigonometría

ME Omar Eduardo De la Torre Aldama
Edición de la obra

MC Gerardo Valdés Bermudes
Edición de la obra

Ing. Norma Patricia Hernández Tamez
Edición de la obra

Academia Nacional de Matemáticas

Nombre	Plantel	Estado
Juan Carlos Díaz Puga	CBTIS 39	Aguascalientes
José Antonio Hirata Moyeda	CBTIS 140	Baja California
José Luis Colorado Betanzos	CBTIS 69	Baja California Sur
Ana Maria García Zuñiga	CETIS 2	Ciudad de México
Loan Alejandra Servin Rodríguez	CETIS 52	Ciudad de México
Brillante Zavala Centeno	UAC	Campeche
Yudibeth Sánchez Castellanos	CETIS 138	Chiapas
Miguel Angel Peña Ogaz	CBTIS 228	Chihuahua
Omar Eduardo De la Torre Aldama	CETIS 83	Coahuila
Felipe de Jesús Navarro Camacho	CBTIS 157	Colima
J. Armando Quezada López	CBTIS 89	Durango
Marcos Belisario González Loria	CBTIS 160	Estado de México
David Fernando López López	CBTIS 172	Guanajuato
Jesús Eugenio Ruiz Flores	CBTIS 60	Guanajuato
Eduardo Tomás Torres	CBTIS 178	Guerrero
Emilio Jaime Mendoza Gómez	CBTIS 199	Hidalgo
Eliseo Santoyo Teyes	CBTIS 226	Jalisco
Oscar Villalpando Barragán	CBTIS 12	Michoacán
Luis Manuel Guerra Franco	CBTIS 76	Morelos
Lucía Sánchez Ramos	CBTIS 74	Nuevo León
Eva Cruz Brena	CBTIS 183	Oaxaca
Julio Alberto González Negrete	CBTIS 86	Puebla
Gilmer de Jesús Pat Sánchez	CBTIS 111	Quintana Roo
Gerardo Valdés Bermudes	CBTIS 224	Sinaloa
Martín Vega Gómez	CETIS 128	Sonora
Eva María Sánchez Luna	CBTIS 249	Tabasco
Norma Patricia Hernández Tamez	CBTIS 007	Tamaulipas
Miguel Constantino Hernández Pérez	CETIS 132	Tlaxcala
Miguel Ángel Pavón Cordero	CBTIS 48	Veracruz
Silvia Leonor Martínez Quijano	CBTIS 80	Yucatán
Efraín Reyes Cumplido	CBTIS 104	Zacatecas